Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo - A.A. 2001/2002
Compito 1 - 05/06/2002 - Tema B

Problema 1. In figura 1 è rappresentato il modello di un'elettrocalamita. Un cilindretto metallico è inserito in una bobina e si muove grazie al campo induzione magnetica generato in essa dalla corrente che vi scorre. Il cilindretto è inoltre collegato ad un punto fisso con una molla. Il circuito è comandato dalla tensione d'ingresso $u(t)$, la variabile d'uscita è rappresentata dalla posizione $y(t)$ del cilindretto. L'equilibrio elettrico del circuito è dato dall'equazione

$$u(t) - Ri(t) - L\frac{d}{dt}i(t) - v_c(t) = 0$$

dove R e L è sono la resistenza del circuito e l'induttanza della bobina, $i(t)$ è la corrente e $v_c(t)$ è la forza controelettromotrice generata dal movimento del cilindretto proporzionalmente alla velocità di questo, ovvero

$$v_c(t) = K_c\frac{d}{dt}y(t)$$

dove K_c è una costante.
La forza magnetica sul cilindretto $f(t)$ è proporzionale alla corrente $i(t)$ secondo una costante K_f, ossia

$$f(t) = K_f i(t).$$

Il comportamento meccanico del sistema è quindi descritto dall'equazione della dinamica

$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) = f(t) - ky(t)$$

dove M è la massa del cilindretto e k è la costante elastica della molla.

1. Determinare una rappresentazione di stato del sistema assumendo come ingresso la tensione $u(t)$, come uscita la posizione $y(t)$ e come stato il vettore
$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{bmatrix}.$$
2. Determinare la funzione di trasferimento $P(s)$ del sistema da $u(t)$ a $y(t)$.
3. Supponendo che $P(s)$ rappresenti la funzione di trasferimento dell'impianto nel sistema di controllo in figura 2, sia
$$C(s) = \frac{1+\beta s}{1+\alpha s}$$
la funzione di trasferimento del controllore (α e β costanti) e
$$H(s) = 1$$
quella del sensore. Determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ a ciclo chiuso, ovvero la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento $r(t)$ e l'uscita $y(t)$.

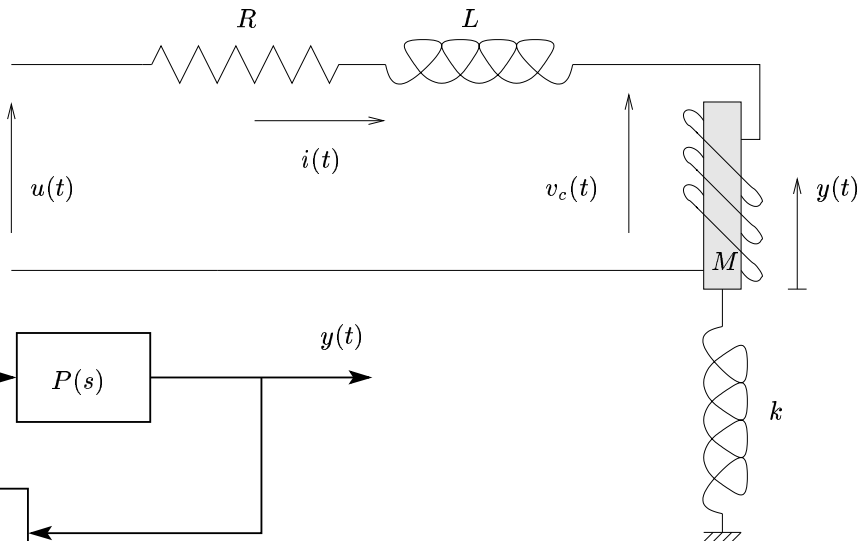


Fig. 1

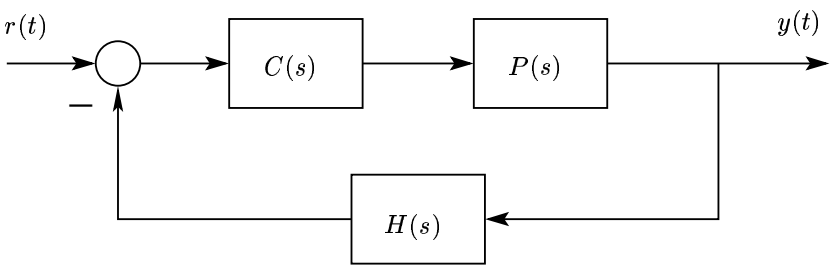


Fig. 2

Problema 2. È dato il sistema lineare tempo invariante tempo continuo descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \beta u \\ \dot{x_2} &= -x_1 + \alpha x_2 + u \\ y &= x_2 \end{cases}$$

Stabilire quali relazioni devono soddisfare i parametri α e β affinché si verifichi ciascuna delle seguenti condizioni.

1. Il sistema non ha modi esponenziali
2. La risposta all'impulso nell'uscita è costante per ogni $t \geq 0$
3. La risposta nell'uscita al segnale $u(t) = e^t 1(t)$ vale $y(t) = te^t 1(t)$.

Nella condizione del caso 3, determinare i modi del sistema e calcolare la risposta al gradino nell'uscita.

Problema 3. Si consideri il sistema a tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= \frac{1}{2}\, x_1(t) + \frac{1}{2}\, x_2(t) \\ x_3(t+1) &= -x_1(t) + 2\, x_2(t) + \frac{1}{2}\, x_3(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato $x_l(t) = (x_{l_1}(t), x_{l_2}(t), x_{l_3}(t))$, nei casi:
   - $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 2$;
   - $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$;
   - $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 3$, $x_3(0) = 0$.
2. Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$, relativa all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$.

Problema 4. Si considerino i seguenti sistemi dinamici

$$(\Sigma_1) \; : \; \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dfrac{3x_2(t)}{x_1(t)+1} + u(t) \end{cases} \qquad (\Sigma_2) \; : \; \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dfrac{1}{1+t}\, x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

$$(\Sigma_3) \; : \quad x(t+1) = -t^4 x^2(t) \qquad (\Sigma_4) \; : \; \begin{cases} x_1(t+1) &= x_1(t) - u(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -5\, x_1(t) \end{cases}$$

Dire quali tra i sistemi considerati sono lineari e quali sono stazionari (tempo-invarianti). Per i sistemi LTI (lineari e tempo-invarianti) determinare le matrici A e B dell'equazione di transizione dello stato.