Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo

Elaborato 6: sistemi lineari tempo-discreto, rappresentazione ingresso-stato-uscita

Problema 1. Dato il sistema lineare tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 2x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) - x_2(t) - u(t) \\ x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 1 \end{cases}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato.
2. Determinare la risposta forzata ad un ingresso a gradino unitario.

Problema 2. È dato il sistema lineare tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_2(t) + u(t) \\ x_3(t+1) &= x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
2. Calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso impulsivo
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}.$$
3. Determinare un segnale d'ingresso $u(t)$ limitato, tale che la corrispondente risposta forzata $y_f(t)$ risulti non limitata.

Problema 3. Si consideri il sistema a tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= \frac{1}{2}\,x_1(t) + \frac{1}{2}\,x_2(t) \\ x_3(t+1) &= -x_1(t) + 2\,x_2(t) + \frac{1}{2}\,x_3(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato $x_l(t) = (x_{l_1}(t), x_{l_2}(t), x_{l_3}(t))$, nei casi:
   - $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 2$;
   - $x_1(0) = x_2(0) = 1,\ \ x_3(0) = 2$;
   - $x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 3,\ \ x_3(0) = 0$.
2. Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$, relativa all'ingresso a gradino $u(t) = 1$, $t \geq 0$.

Problema 4. Si consideri il sistema tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= u(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + \frac{1}{4}x_3(t) \\ x_3(t+1) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) &= x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

1. Assumendo le condizioni iniziali $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$, determinare la risposta libera nello stato $x_l(t)$.
2. Calcolare la risposta forzata nell'uscita relativa all'ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t)$.
3. Determinare se possibile un segnale di ingresso $u(t)$ tale che la risposta forzata nell'uscita risulti essere pari a $y_f(t) = (t-1)\,\mathbf{1}(t-1)$.