Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo

Elaborato 5: sistemi lineari tempo-continuo, rappresentazione ingresso-stato-uscita

Problema 1. Dato il sistema lineare tempo-invariante tempo-continuo ad un ingresso e due uscite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice di trasferimento $W(s)$ e la risposta totale nell'uscita, relativa al segnale d'ingresso $u(t) = \sin t\, \mathbf{1}(t)$, sapendo che la condizione iniziale vale $x_0 = [1 \;\; 1]^T$.

Problema 2. Si consideri il sistema descritto dalle equazioni (1), in cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = 0.$$

1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il carattere dei modi propri del sistema
2. Al variare di α, calcolare l'espressione della risposta al gradino $u(t) = \mathbf{1}(t)$
3. Al variare di α e β, determinare l'espressione della risposta all'esponenziale $u(t) = e^{\beta t}\, \mathbf{1}(t),\ \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 3. È dato il sistema lineare tempo-invariante tempo-continuo descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui i modi del sistema sono reali e convergenti, ovvero hanno limite finito per $t \to +\infty$
2. Posto $\alpha = 0$, determinare esplicitamente i modi del sistema.

Problema 4. È dato il sistema lineare tempo-continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato alla condizione iniziale $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$.
2. Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$ all'ingresso a gradino unitario $u(t) = \mathbf{1}(t)$.
3. Determinare per quale ingresso $u(t)$, la risposta forzata del sistema è pari a $y_f(t) = (t - 1 + e^{-t})\, \mathbf{1}(t)$.

Problema 5. È dato il sistema lineare tempo-continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -(\alpha+2) & 2(\alpha+1) & 1 \\ -(\alpha+1) & \alpha & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

1. Determinare i modi propri del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Per $\alpha = -1$, calcolare la risposta libera nello stato alla condizione iniziale $x_0 = [1 \;\; -1 \;\; 0]'$.
3. Per $\alpha = -1$, calcolare la risposta forzata nell'uscita al gradino unitario per condizioni iniziali nulle.
4. Per $\alpha = -1$, verificare se è definita la risposta di regime permanente sinusoidale. Se sì, determinare un possibile ingresso sinusoidale $u(t)$ in modo che la risposta di regime permanente valga $y_P(t) = \frac{1}{2} \sin t\, \mathbf{1}(t)$.