Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo
Elaborato 4: riepilogo sulla prima parte del corso

Problema 1. Dato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s-1}{s^4 + \alpha s^3 + 2(\alpha+1)s^2 + 16s + 8}$$

determinare α in modo che la risposta del sistema (per condizioni iniziali nulle) al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ sia della forma

$$y(t) = \left[A + (B + Ct)e^{-2t} + De^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)\right] 1(t)$$

dove $A, B, C, D, \sigma, \omega, \phi$ sono opportune costanti (con $A, B, C, D, \sigma, \omega$ diverse da zero). Calcolare quindi il valore di tali costanti.

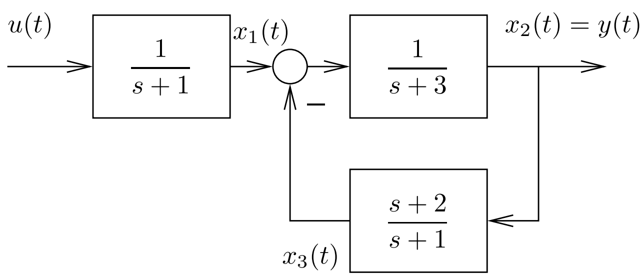
Problema 2. In un casinò, una delle attrazioni si basa sul gioco delle tre carte: lo scommettitore deve indovinare dove si trova una carta, scegliendone una fra tre coperte, disposte casualmente (in media, quindi, un terzo dei giocatori indovina e due terzi sbagliano). Più specificamente, si tratta di un gioco a turni in cui, pagata una quota di iscrizione fissa (pari ad α), ciascun giocatore continua a giocare finché non indovina consecutivamente due volte (e allora riceve il premio), o sbaglia consecutivamente due volte (e allora viene eliminato dal gioco).

1. Si costruisca un modello lineare ingresso-stato-uscita tempo discreto, che metta in relazione il numero di giocatori che ad ogni turno inizia a giocare ($u(t)$), con il numero di quelli che vincono la scommessa e incassano il premio ($y(t)$). Si considerino come variabili di stato il numero di giocatori che hanno indovinato una volta ed il numero di giocatori che hanno sbagliato una volta.

2. Determinare un modello ingresso-uscita, a partire dal modello calcolato al punto precedente.

3. Supponendo che il casinò voglia trattenere per sé (e quindi non ridistribuire come premio) il 50% degli incassi forniti dalle quote di iscrizione, determinare (in funzione di α) l'entità del premio che deve essere erogato in caso di vittoria supponendo che ad ogni turno inizi a giocare sempre lo stesso numero di giocatori e che sia trascorso un numero elevato di turni dall'inizio del gioco.

Problema 3. Si consideri schema a blocchi in figura.



1. Calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = Y(s)/U(s)$ e la rappresentazione del sistema sotto forma di equazione differenziale ingresso-uscita.

2. Determinare le matrici A, B, C, D della rappresentazione ingresso-stato-uscita che si ottiene prendendo come vettore di stato $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)]'$.

3. Calcolare il valore di regime $\lim_{t\to+\infty} y_f(t)$ della risposta forzata del sistema, relativa all'ingresso a gradino unitario.

4. Calcolare la risposta forzata del sistema, relativa all'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} .$$

Problema 4. L'evoluzione nel tempo dell'uscita di un sistema dinamico tempo-continuo è descritta dalla seguente equazione

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau^3)d\tau$$

dove $w(t)$ è una certa funzione reale e $u(t)$ è la funzione di ingresso.

1. Dire se il sistema è lineare

2. Supponendo di considerare l'evoluzione del sistema per $t \in [0, t_0]$, dire se il sistema può definirsi causale per qualunque valore di t_0.

Giustificare le affermazioni fatte.