

Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo

Elaborato 3: modelli TD, trasformata Zeta

Problema 1. Si vuole determinare il modello dell'evoluzione della popolazione in una città. A tale fine, si considerano 2 differenti classi: quella degli individui fra 0 e 15 anni (prima classe) e maggiori di 15 anni (seconda classe). Siano μ_1 e μ_2 i tassi di mortalità di ciascuna classe (la frazione di individui deceduti in quella classe nell'arco di 15 anni), mentre si indichi con α_2 il tasso di fertilità della classe 2 (l'unica in grado di avere figli), espresso come il numero medio di figli che ogni individuo ha in 15 anni. Sia inoltre $u(t)$ il numero di immigrati (tutti di età superiore ai 15 anni) che si trasferiscono in città in un periodo di 15 anni.

Costruire un modello tempo discreto in variabili di stato che renda ragione dell'evoluzione a periodi di 15 anni del numero di appartenenti alla seconda classe in funzione del numero di immigrati.

Determinare successivamente un modello ingresso-uscita (considerando sempre come uscita il numero di appartenenti alla seconda classe) e calcolarne la funzione di trasferimento.

Assumendo $\mu_1 = 0.1$ e $\mu_2 = 0.2$, determinare per quali valori del parametro α_2 la popolazione non destinata ad estinguersi in caso di immigrazione nulla.

Problema 2. È dato il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione

$$y(t+2) + 0.5y(t+1) - 0.5y(t) = u(t).$$

1. Determinare la risposta del sistema per ingresso nullo e condizioni iniziali $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$.
2. Calcolare la risposta forzata del sistema relativa all'ingresso a gradino unitario.
3. Determinare se la risposta forzata del sistema relativa all'ingresso $u(k) = (-1)^k$, $k \geq 0$, è limitata.

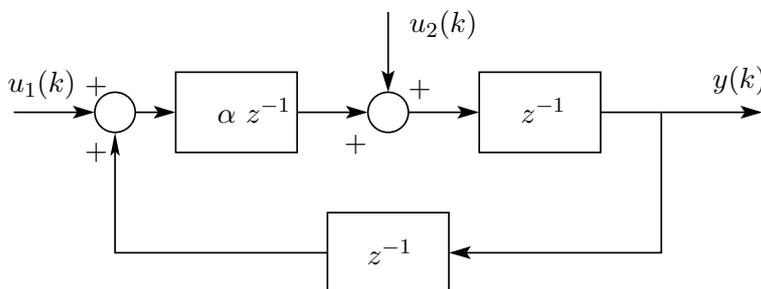
Problema 3. La risposta all'impulso di un sistema lineare tempo-discreto tempo-invariante è data dalla sequenza

$$\{w(k)\} = \{1, -1, 3\sigma^2, -3\sigma^2, 9\sigma^4, -9\sigma^4, 27\sigma^6, -27\sigma^6, \dots\}$$

dove σ è un parametro reale.

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema
2. Determinare, se esistono, i valori di σ tali che la risposta all'impulso tenda a zero per $k \rightarrow +\infty$.
3. Posto $\sigma = 1/(2\sqrt{3})$, calcolare la risposta al gradino unitario.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare tempo-discreto descritto dallo schema a blocchi in figura



dove α è un parametro reale.

1. Calcolare la funzione di trasferimento $W_1(z)$ da $u_1(k)$ a $y(k)$, e la funzione di trasferimento $W_2(z)$ da $u_2(k)$ a $y(k)$.
2. Determinare il valore di regime assunto da $y(k)$ per $k \rightarrow +\infty$ in funzione di α , nei seguenti casi:

- $u_1(k) = 1, u_2(k) = 0, \forall k \geq 0$;
- $u_1(k) = 0, u_2(k) = 1, \forall k \geq 0$;
- $u_1(k) = 3, u_2(k) = 5, \forall k \geq 0$.

3. Assumendo $\alpha = 1$, calcolare la risposta impulsiva relativa all'ingresso $u_1(k)$ (con $u_2(k) \equiv 0$).

Problema 5. Calcolare l'antitrasformata zeta delle seguenti funzioni

$$F(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 1/4)(z + 1/3)} \quad ; \quad F(z) = \frac{z + 1}{z^2(z - 1/2)} \quad ; \quad F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} \quad (\text{attenzione!})$$