

Il criterio del cerchio: esempi svolti ed esercizi

Fabio Morbidi

21 Giugno 2007

I. ALCUNI RICHIAMI DI TEORIA

Con riferimento alla Fig. 1, supponiamo che l'ingresso esterno r sia zero e studiamo il comportamento del sistema non forzato,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

$$u = -\psi(t, y) \quad (3)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}$, la coppia (A, B) è raggiungibile, la coppia (A, C) osservabile e $\psi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una non linearità senza memoria, possibilmente tempo variante, continua a tratti in t e localmente Lipschitz in y . La funzioni di trasferimento del sistema lineare è data da $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Nota che $G(s)$ è una funzione strettamente propria e che le assunzioni di raggiungibilità e osservabilità assicurano che $\{A, B, C\}$ sia una realizzazione minima di $G(s)$.

Supponiamo che $\psi(t, y)$ soddisfi una *condizione di settore*. Si dice che $\psi(t, y)$ soddisfa una condizione di settore (o che è una non linearità di settore) se esistono delle costanti α, β, a e b (con $\beta > \alpha$ e $a < 0 < b$) tali che,

$$\alpha y^2 \leq y\psi(t, y) \leq \beta y^2, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b]. \quad (4)$$

Se la (4) vale per ogni $y \in (-\infty, +\infty)$ si dice che la condizione di settore vale globalmente e che $\psi(t, y)$ appartiene ad un settore $[\alpha, \beta]$. Se si richiede una disuguaglianza stretta nella parte sinistra e/o destra della (4), si dice che $\psi(t, y)$ appartiene al settore $(\alpha, \beta]$, $[\beta, \alpha)$ o (α, β) , con ovvie implicazioni.

Definition 1 (Stabilità assoluta): Consideriamo un sistema della forma (1)-(3), dove $\psi(t, y)$ soddisfa la condizione di settore (4). Il sistema è *assolutamente stabile* se l'origine è globalmente uniformemente asintoticamente stabile per ogni non linearità nel settore $[\alpha, \beta]$. È *assolutamente stabile con dominio finito* se l'origine è uniformemente asintoticamente stabile.

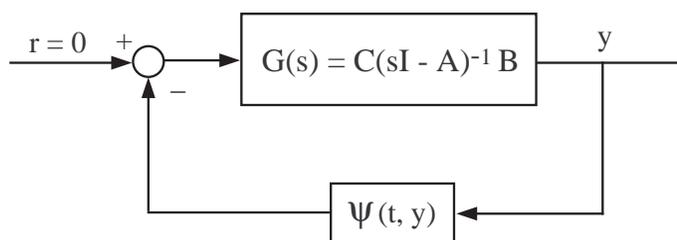


Fig. 1. Connessione in anello chiuso di un sistema lineare e di un elemento non lineare $\psi(t, y)$.

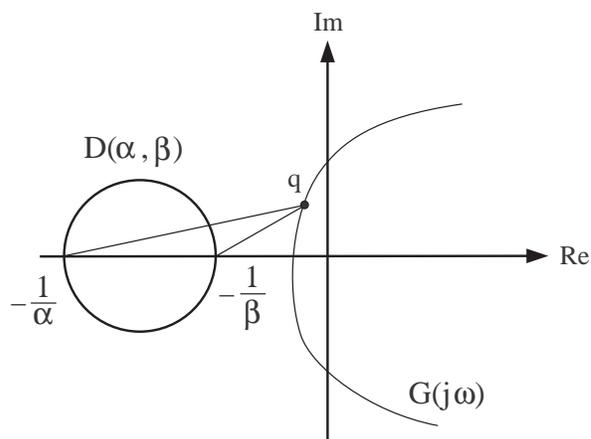


Fig. 2. Rappresentazione grafica del criterio del cerchio.

Theorem 1 (Criterio del cerchio): Consideriamo un sistema della forma (1)-(3), dove $\{A, B, C\}$ è una realizzazione minima di $G(s)$ e $\psi(t, y)$ soddisfa la condizione di settore (4) globalmente. Allora il sistema è assolutamente stabile se una delle seguenti condizioni è soddisfatta, (vedi Fig. 2):

- 1) Se $\alpha < 0 < \beta$, il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ non entra nel cerchio $D(\alpha, \beta)$ e lo circonda m volte in senso antiorario, dove m è il numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva.
- 2) If $0 = \alpha < \beta$, $G(s)$ è Hurwitz ed il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ è a destra della retta verticale definita da $Re[s] = -1/\beta$.
- 3) Se $\alpha < 0 < \beta$, $G(s)$ è Hurwitz ed il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ giace all'interno del cerchio $D(\alpha, \beta)$.

Se la condizione di settore (4) è soddisfatta solo su un intervallo $[a, b]$, allora le precedenti condizioni assicurano che il sistema è assolutamente stabile con un dominio finito. ■

Il criterio del cerchio consente di studiare la stabilità assoluta utilizzando solamente il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$. Dato il diagramma possono essere determinati facilmente i settori ammissibili per i quali il sistema è assolutamente stabile.

II. ESEMPI SVOLTI ED ESERCIZI

Usando il criterio del cerchio, studiare la stabilità assoluta delle seguenti funzioni scalari. In ogni caso trovare un settore $[\alpha, \beta]$ per cui il sistema è assolutamente stabile.

(1)
$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Dal momento che funzione $G(s)$ è Hurwitz possiamo considerare α negativa e applicare il terzo caso del criterio del cerchio. Dobbiamo dunque determinare un cerchio $D(\alpha, \beta)$ che circonda il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ (vedi Fig. 3). Chiaramente la scelta del cerchio non è unica. Supponiamo di porre il centro del cerchio nell'origine del piano complesso. Questo significa che dovremo lavorare con un cerchio $D(-\gamma, \gamma)$, dove il raggio $\gamma > 0$ deve essere fissato. Dalla Fig. 3 si ricava che $\sup_{\omega} |G(j\omega)| = 0.1667$, quindi possiamo concludere che il sistema è assolutamente stabile per tutte le non linearità nel settore $[-1/0.1667, 1/0.1667]$.

Ponendo il centro del cerchio in un punto diverso dall'origine, si possono determinare cerchi che circondano il diagramma di Nyquist in maniera più stringente e dunque ottenere settori più ampi. Poniamo ad esempio il centro in $(0.05, 0)$. La massima distanza fra questo punto ed il diagramma di Nyquist è 0.1167 , quindi il sistema è assolutamente stabile per tutte le non linearità nel settore $[-1/0.1167, 1/0.1667]$.

Supponiamo adesso che $\alpha = 0$ ed applichiamo il secondo caso del criterio del cerchio. Il diagramma di Nyquist si trova alla destra della retta $Re[s] = -0.021$. Perciò il sistema è assolutamente stabile per tutte le non linearità nel settore $[0, 1/0.021]$. Nota che il secondo caso del criterio del cerchio ci fornisce la migliore stima di β , a costo però di restringersi a non linearità nel primo e terzo quadrante.

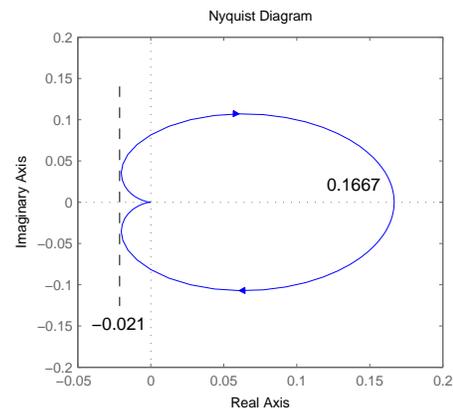


Fig. 3. Diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$.

$$(2) \quad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s-1)}$$

La funzione $G(s)$ non è Hurwitz in quanto possiede un polo a parte reale positiva. Dobbiamo quindi restringerci ad α positive ed applicare il primo caso del criterio del cerchio. Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ è riportato in Fig. 4. Dal Teorema 1, sappiamo che il diagramma di Nyquist deve circondare il cerchio $D(\alpha, \beta)$ una volta in senso antiorario. Poniamo il centro del cerchio nel punto $(-0.15, 0)$. La minima distanza fra questo punto ed il diagramma di Nyquist è 0.0873. Perciò scegliendo come raggio 0.0873, possiamo concludere che il sistema è assolutamente stabile per tutte le non linearità nel settore $[1/0.2373, 1/0.0627]$.

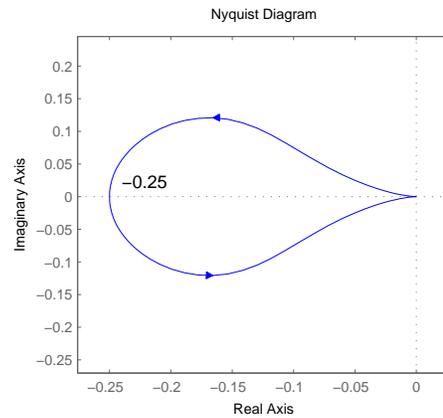


Fig. 4. Diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$.

$$(3) \quad G(s) = \frac{s}{s^2 - s + 1}$$

La funzione $G(s)$ ha due poli a parte reale positiva, $p_1, p_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$. Quindi come nell'esempio precedente dobbiamo restringerci ad α positive ed applicare il primo caso del criterio del cerchio. Tuttavia come è evidente in Fig. 5, in questo caso non si riesce a determinare un cerchio $D(\alpha, \beta)$ che è circondato 2 volte in senso antiorario dal diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$. In altre parole non esiste un settore dove il sistema è assolutamente stabile.

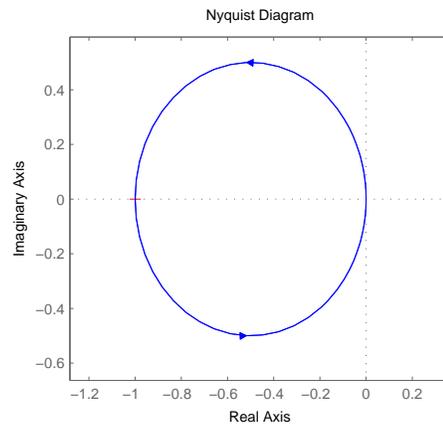


Fig. 5. Diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$.

$$(4) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$(5) \quad G(s) = \frac{s^2 - 1/2}{(s+1)(s^2 + 1)}$$

$$(6) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$(7) \quad G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$$

$$(8) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$(9) \quad G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^3}$$

$$(10) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$$

$$(11) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$(12) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}$$

$$(13) \quad G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \quad \text{con}$$

$$\psi(y)^a = \begin{cases} -1 & \text{se } y < -1 \\ y & \text{se } |y| < 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

$$(14) \quad G(s) = \frac{4}{(s+1)(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)} \quad \text{con}$$

$\psi(y)$ come nella (13).

$$(15) \quad \text{Mostrare che } G(s) = \frac{2s}{s^2 + s + 1}$$

è assolutamente stabile per non linearità nel settore $[0, 1]$.

^aNota che questa non linearità, una *funzione di saturazione*, si trova di frequente nei sistemi in retroazione a causa di vincoli sulle variabili fisiche.