$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_0x_1 + Ex_0x_2 + Fx_0^2 = 0$$

CONICHE

$$\begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix} = M$$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

rango $M = 1$ retta doppia

rango $M = 2$ 2 rette

rango $M = 3$ $x^2+y^2-1=0$

Ex

rango $M = 2$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = M$$

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_0x_1 + 6x_0x_2 + 2x_0^2$$

$$\underbrace{x^2 + 4xy + 5y^2}\ + 2x + 6y + 2$$

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')$$

$$\underbrace{aa'x^2 + (ab'+a'b)xy + bb'y^2}_{\displaystyle = (ax+by)(a'x+b'y)} + \dots$$

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{4y^2 - 5y^2}}{\cancel{2}} = \frac{-2y \pm \sqrt{-y^2}}{\cancel{2}} = -2y \pm y\sqrt{-1} \begin{cases} (-2+i)y \\ (-2-i)y \end{cases}$$

$$x = (-2+i)y \qquad x + (2-i)y = 0$$

$$x = (-2-i)y \qquad x + (2+i)y = 0$$

$$(x+(2-i)y)(x+(2+i)y) = x^2 + \left[(2\cancel{-i}) + (2\cancel{+i})\right]xy + (2-i)(2+i)y^2$$

$$= x^2 + 4xy + (4-i^2)y^2 = x^2 + 4xy + 5y^2$$

$$(x+(2-i)y+c)(x+(2+i)y+c') = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x + 6y + 2$$

$$\underline{(x+(2-i)y)(x+(2+i)y)} + c(x+(2+i)y) + c'(x+(2-i)y) + cc'$$

$$= x^2 + 4xy + 5y^2 + cx + (2+i)cy + c'x + (2-i)c'y + cc'$$

$$= x^2 + 4xy + 5y^2 + \underline{(c+c')}x + \underline{((2+i)c + (2-i)c')}y + cc'$$

$$\begin{cases} c + c' = 2 \\ (2+i)c + (2-i)c' = 6 \\ cc' = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 2 - c' \\ (2+i)(2-c') + (2-i)c' = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 2 - c' \\ 4 - ic' + 2i - \cancel{2c'} + \cancel{2c'} - ic' = 6 \end{cases}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{\|z\|} \qquad \frac{1}{i} = -i \qquad (112)$$

$$\begin{cases} c = 2 - c' \\ -\cancel{2}i c' = \cancel{2} - \cancel{2}i \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 - c' \\ -i c' = 1 - i \end{cases} \qquad c' = \frac{i-1}{i} = (-i)(i-1) = -i^2 + i = \boxed{1+i}$$

$$\begin{cases} c = 2 - c' = 2 - (1+i) = \boxed{1-i} \end{cases}$$

$$cc' = (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2$$

$$\boxed{x + (2-i)y + (1-i) = 0} \quad (r) \qquad \boxed{x + (2+i)y + (1+i) = 0} \quad (r')$$

$r \cup r'$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

rango $M = 1$ — retta doppia reale

rango $M = 2$ — 2 rette
- reali
- complesse coniugate r $\bar{r}$
  c'è un unico punto reale $r \cap \bar{r}$

rango $M = 3$
- conica con 0 punti reali $x^2+y^2+1=0$
  autoval. concordi
- conica con ∞ " " $x^2+y^2-1=0$
  autoval. discordi

Def r retta reale $\iff$ ha almeno una eq. reale

P punto reale $\iff$ $P \equiv \overline{(x_1, x_2, x_0)}$ con $x_1, x_2, x_0 \in \mathbb{R}$

r reale $\Rightarrow$ ∞ punti reali

r non reale

una retta con 2 punti reali è reale $\Leftarrow$

2 punti
$(a\ b\ c)$ (a', b', c')
retta

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{pmatrix} = 0$$

$r \quad ax+by+c=0$ $\qquad\qquad$ $\bar{r} \quad \bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}=0$ $\qquad$ $\bar{r} = r$ coniugata

$\alpha a x+\alpha b y+\alpha c=0$ $\qquad\qquad$ $\overline{\alpha a}\, x+\overline{\alpha b}\, y+\overline{\alpha c}=0$

$\bar{\alpha}\,\bar{a}x+\bar{\alpha}\,\bar{b}y+\bar{\alpha}\,\bar{c}=0$

$\bar{\alpha}(\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c})=0$

ovviamente r è reale $\iff r=\bar{r}$

$P \equiv (x_1, x_2, x_0)$ $\qquad\qquad$ $\bar{P} \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_0)$ $\qquad$ $\bar{P}$ = P coniugato

P è reale $\iff P=\bar{P}$

Prop

$P \in r \iff \bar{P} \in \bar{r}$

dim $\quad P \equiv (x_1\ x_2\ x_0) \qquad r \qquad ax_1+bx_2+cx_0=0 \iff P \in r$

$$\overline{ax_1+bx_2+cx_0} = \bar{0}=0$$

$$\bar{a}\,\bar{x}_1+\bar{b}\,\bar{x}_2+\bar{c}\,\bar{x}_0=0 \iff (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_0)=\bar{P} \in \bar{r}$$

r non reale $\qquad \bar{r} \neq r$

$r \cap \bar{r}$ = un punto P $\qquad P \in r \Rightarrow \bar{P} \in \bar{r}$

$P \in \bar{r} \Rightarrow \bar{P} \in \bar{\bar{r}} = r$

$\bar{P} \in r \cap \bar{r}$

$\Downarrow$

$P = \bar{P}$ cioè P è reale

$x + (2-i)y + (1-i) = 0 \qquad x + (2+i)y + (1+i) = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2-i & i-1 \\ 1 & 2+i & -i-1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2-i & i-1 \\ 0 & 2i & -2i \end{array}\right) \quad y = -1$$

$x + (2-i)y = i-1$

$x - (2-i) = i-1$

$x - 2 + \cancel{i} = \cancel{i} - 1 \qquad x = 1$

$x = \frac{x_1}{x_0} \qquad y = \frac{x_2}{x_0}$

$x = 1 = 1/1$

$y = -1 = -1/1$

$(1 \ -1 \ 1)$

Prop Per ogni punto $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ $\exists$ retta reale $r \ni P$

dim

se P non reale, $P \neq \overline{P}$ $\quad r =$ retta $P\overline{P}$

$$P \in r \Rightarrow \overline{P} \in \overline{r}$$
$$\overline{P} \in r \Rightarrow P \in \overline{r}$$

$\overline{r}$ passa per $P\overline{P}$

$r = \overline{r} \quad \Leftarrow$

cioè r è reale.

Ex $\quad P \equiv (4i, 2, 1-3i) \qquad \overline{P} = (-4i, 2, 1+3i)$

$$\det\begin{pmatrix} 4i & 2 & 1-3i \\ -4i & 2 & 1+3i \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{pmatrix} = x_1 \det\begin{pmatrix} 2 & 1-3i \\ 2 & 1+3i \end{pmatrix} - x_2 \det\begin{pmatrix} 4i & 1-3i \\ -4i & 1+3i \end{pmatrix} + x_0 \det\begin{pmatrix} 4i & 2 \\ -4i & 2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(\cancel{2}+6i\cancel{-2}+6i) - x_2(4i+\cancel{12i^2}+4i-\cancel{12i^2}) + x_0(8i+8i)$$

$\boxed{12i x_1 - 8i x_2 + 16i x_0 = 0} \qquad 4i(3x_1 - 2x_2 + 4x_0) = 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 + 4x_0 = 0$

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

rango $M=1$
- retta doppia in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ $(ax+by+c)^2$ $(a,b)\neq(0,0)$
- retta all'∞ doppia $\underset{\alpha\neq 0}{\alpha x_0^2=0}$ $\underline{\alpha=0}$ impossibile

rango $M=2$
- retta all'∞ + retta $x_0(ax_1+bx_2+cx_0)$ $ax+by+c$
- 2 rette //
- 2 rette incidenti

rango $M=3$
- 2 punti all'∞ NON PARABOLA
- 1 punto doppio all'∞ tg alla retta all'∞ PARABOLA ⊗

$\det M_{33}=0$ $\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2x+4y+3=0$$

$$(x+y+1)(x+y-3) \qquad x^2+2xy+y^2-2x-2y-3=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$y=x^2$ $\quad x^2-y=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^2-x_0x_2=0 \\ x_0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^2=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

⊗ $M=\begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} Ax_1^2+Bx_1x_2+Cx_2^2+Dx_0x_1+Ex_0x_2+Fx_0^2=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$0=Ax_1^2+Bx_1x_2+Cx_2^2 \qquad \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}=M_{33}$$

Def Una conica è di TIPO PARABOLICO se $\det M_{33} = 0$

rango $M = 1$ tutte di tipo parabolico

rango $M = 2$
- retta all'∞ + retta è di tipo parabolico
- 2 rette // sono di tipo parabolico
- 2 rette incid. <u>non</u> è di tipo parabolico

retta all'∞ + retta

$$x_0(ax_1 + bx_2 + cx_0) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a/2 \\ 0 & 0 & b/2 \\ a/2 & b/2 & c \end{pmatrix} = M \qquad M_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $M = 3$
- parabola (di tipo parabolico)
- non parabola (non è di tipo parabolico)

Ex Fra tutte le coniche del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

determ. quelle di tipo parabolico e studiarle in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$$M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} \qquad \det = -1 - k^2 = 0 \qquad k^2 = -1 \qquad k = \pm i$$

$k = i$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ rango 2

$$\det = \det\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2i+1) - 2(2-i) = 2i+1-4+2i$$

$$= -3+4i \neq 0$$

rango 3 $\Rightarrow$ parabola

$k = -i$

$\det = -3-4i \neq 0 \Rightarrow$ parabola

$A^2_{\mathbb{C}}$

$\det M_{33} = 0$

$\det = ~~\det~~ 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$2a x_0 x_1 + 2b x_0 x_2 + c x_0^2$

$x_0(2a x_1 + 2b x_2 + c x_0)$

$\Leftarrow$

$(a,b) = (0,0)$ retta all'∞ doppia

$(a,b) \neq (0,0)$ retta all'∞ + retta

$x_1^2 + 2a x_1 x_0 + 2b x_0 x_2 + c x_0^2$

$x^2 + 2ax + 2by + c = 0$

$\swarrow$ $b = 0$

$\det M = 0$

$\swarrow$ $x^2 = 0$ retta doppia

$\Downarrow$ $x^2 + 2ax + c = 0$

$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$

2 rette //

$\Downarrow$ $b \neq 0$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2b}x^2 - \frac{a}{b}x - \frac{c}{2b}}$$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$x^2+y^2-1=0$ $\qquad\qquad$ $x^2+y^2+1=0$

∞ punti reali $\qquad\qquad$ 0 punti reali

0 punti reali $\Leftrightarrow$ non ci sono vettori isotropi reali $\Leftrightarrow$ la forma bilin. è definita $\Leftrightarrow$ gli autovalori sono concordi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2+1=0$ $\qquad\qquad$ $-x^2-y^2-1=0$

forma bilin. non è definita $\Leftrightarrow$ autovalori discordi

2 autoval. positivi 1 negativo $\qquad\qquad$ 1 autoval. positivo e 2 negativi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2-1=0$ $\qquad\qquad$ $x_1^2-x_2^2-x_0^2=0$

∞ punti reali

$x_1 \Leftrightarrow x_0$ $\qquad$ $-x_1^2-x_2^2+x_0^2=0$

$x^2+y^2-1=0$ $\qquad$ $x_1^2+x_2^2-x_0^2=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{x^2+4xy+y^2+6x-2y+2=0}$$

$$\det = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - 2(7) + 3(-5) < 0$$

$$= -28$$

rango 3

$$\det\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 3 \\ 2 & 1-\alpha & -1 \\ 3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix} = (1-\alpha)\det\begin{pmatrix} 1-\alpha & -1 \\ -1 & 2-\alpha \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2-\alpha \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 2 & 1-\alpha \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha)\left[\alpha^2-3\alpha+2-1\right] - 2\left[4-2\alpha+3\right] + 3\left[-2-3+3\alpha\right]$$

$$= \alpha^2-3\alpha+1-\alpha^3+3\alpha^2-\alpha-14+4\alpha-15+9\alpha$$

$$= -\alpha^3+4\alpha^2+9\alpha-28$$

discordi $\Rightarrow$ ∞ punti reali

pos. neg. pos.