Se b <u>non</u> è def.

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ Gram-Schmidt si ferma a

$\mathcal{B}_k = (v_1, \dots, v_{k-1}, w_k, \dots, w_n)$ quando posto

$u_k = w_k - b(v_1, w_k)v_1 - \dots - b(v_{k-1}, w_k)v_{k-1}$ si ottiene

$b(u_k, u_k) < 0$ oppure $b(u_k, u_k) = 0$

non si può definire $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{b(u_k, u_k)}}\, u_k$

$b(u_k, u_k) < 0$ si pone $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{-b(u_k, u_k)}}\, u_k$

$$b(v_k, v_k) = b\left(\frac{1}{\sqrt{-b(u_k,u_k)}}\, u_k, \frac{1}{\sqrt{-b(u_k,u_k)}}\, u_k\right) = \frac{1}{\sqrt{-b(u_k,u_k)}}\,\frac{1}{\sqrt{-b(u_k,u_k)}}\, b(u_k, u_k) =$$

$$= \frac{1}{-b(u_k,u_k)}\, b(u_k, u_k) = -1$$

$u_{k+1} = w_{k+1} - b(w_{k+1}, v_1)v_1 - \dots \dots - b(w_{k+1}, v_k)\, v_k$

Se si arriva in fondo $\mathcal{B}_n$ $\quad M_b^{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$

base ortogonale

Se $b(u_k, u_k) = 0$ è un problema

$\mathcal{B}'_k = (v_1 \dots v_{k-1}\ u_k,\ w_{k+1} \dots w_n)$ $\qquad u_k \perp_b v_i$

$\mathcal{B}''_k = (v_1 \dots v_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ $\qquad \forall j \quad b(u_j, u_j) = 0$

Se $b(u_k, u_{k+1}) \neq 0$ $\qquad \bar{u}_k = u_k + u_{k+1}$

$$b(\bar{u}_k, \bar{u}_k) = b(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{b(u_k, u_k)} + 2\underset{\overset{\not\shortparallel}{0}}{b(u_k, u_{k+1})} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{b(u_{k+1}, u_{k+1})}$$

e $\mathcal{B}'''_k = (v_1, \dots v_{k-1}, u_k + u_{k+1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ va avanti

Non posso andare avanti con $(v_1, \dots, v_{k-1}, u_k, \dots, u_n)$

se $b(u_j, u_j) = 0 \quad j = k, \dots, n$ e $b(u_j, u_{j'}) = 0 \quad j, j' = k, \dots, n$

Ma allora $u_k, \dots, u_n \in \mathrm{Rad}(b)$

$$b(u_k, w) = b(u_k, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 \underbrace{b(u_k, v_1)}_{0} + \dots + \alpha_{k-1} \underbrace{b(u_k, v_{k-1})}_{0} + \alpha_k \underbrace{b(u_k, u_k)}_{0} + \dots + \alpha_n \underbrace{b(u_k, u_n)}_{0} = 0$$

$\forall w \in V \quad w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k u_k + \dots + \alpha_n u_n$

<u>Teor</u> Se b non è degenere ammette una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ <u>ortogonale</u> con $b(v_i, v_i) = \pm 1$

Se b è degenere trovo una base $(v_1, \dots, v_{k-1}, u_k, \dots, u_n)$ ~~[illegible]~~ <u>ortogonale</u> con il prodotto di un elem. per se stesso $= \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

$V_{\mathbb{R}}$ b simm.

Come verificare se b è def. positiva.

Cerchiamo base ortonorm. $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ $b(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Prop Se $\exists$ base ortonorm $\Rightarrow$ b è def positiva

PROCEDIMENTO DI GRAM-SCHMIDT (b def. positiva)

base qualsiasi $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ viene trasformata vettore per vettore in una base orto norm.

Corol Se b def. positiva $\Rightarrow \exists$ base orto norm.

$\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\Rightarrow$ $\forall i$ prima si trova u_i ortogonale a tutti i precedenti

poi si trova v_i che risolve $b(v_i, v_i) = 1$

$\mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{B} = \text{versori} = (e_1, e_2, e_3) \qquad e_1 = (1,0,0) \; \dots\dots$

$$b = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b(e_1, e_1) = 4 \qquad e_1 \longrightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{b(e_1,e_1)}} e_1 = \frac{1}{2} e_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$b(v_1, v_1) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1/2, 0) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$u_2 = e_2 - b(e_2, v_1) v_1 = e_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$$

$$b(e_2, v_1) = (0,1,0) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,3,1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2$$

$$b(v_1, u_2) = (1/2, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1/2, 0) \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1/2 + 1/2 + 0 = 0$$

$$b(u_2, u_2) = (-1/4, 1, 0) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 11/4, 1) \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 11/4$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}}} u_2 = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, 0\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, 0\right)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{11} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(0, \frac{11}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)\begin{pmatrix} -1/2\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{11} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{11 \cdot 2}{2\sqrt{11}\sqrt{11}} = 1$$ 46

$$u_3 = e_3 - \underbrace{b(v_1, e_3)\, v_1} - b(v_2, e_3)\, v_2 =$$

$$b(v_1 e_3) = (1/2, 0, 0)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, 1/2, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$b(v_2, e_3) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, 0\right)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(0, \frac{11}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

$$u_3 = e_3 - \frac{2}{\sqrt{11}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, 0\right) = (0, 0, 1) - \left(-\frac{1}{11}, \frac{4}{11}, 0\right) = \left(+\frac{1}{11}, \frac{-4}{11}, 1\right)$$

$$b(u_3, u_3) = (1/11, -4/11, 1)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/11 \\ -4/11 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1)\begin{pmatrix} 1/11 \\ -4/11 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$v_3 = u_3$

(v_1, v_2, v_3) base ortonorm.

Proc. di Gram-Schmidt

$\mathcal{B} = (w_1, w_2 \dots w_n) \longrightarrow \mathcal{B}_n = (v_1, \dots v_n)$ ortonorm

Prop $L(w_1 \dots w_k) = L(v_1 \dots v_k) \quad \forall k$

Se b def. neg. $\Rightarrow$ $-b$ def. pos.

Trovo base ortonorm. per $-b$

$(v_1 \dots v_n) = \mathcal{B}_n$

$(-b)(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

$b(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ -1 & \text{se } i = j \end{cases}$ (BASE ORTOGONALE)

$M_b^{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = -I$

Teor Ogni matrice simm. è congruente ad una matrice diag. del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

In particolare ogni b simm. ha basi ortogonali.

Ex $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}$ = base versori $= (e_1, e_2)$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{b(e_1,e_1)}} e_1 = e_1$$

$$u_2 = e_2 - b(e_1 e_2) e_1 = e_2 - 2e_1 = (-2,1)$$

$$b(u_2, e_1) = (-2,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$u_2 \in \mathrm{Rad}(b)$ $\quad \overline{\mathcal{B}} = (e_1, e_2 - 2e_1)$ $\quad M_b^{\overline{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Oss Il numero degli 0 nella diag. è la dim di $\mathrm{Rad}(b)$

Perché $\dim \mathrm{Rad}(b) = n - \text{rango } M_b^{\mathcal{B}}$ = n° degli zeri sulla diag.

In particolare se b è non-deg. ci si può ridurre a $\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix}$
e viceversa.

Oss V b forma bilin. $W \subseteq V$ sottosp.

$b_{|W}$ = forma ristretta al sottosp. W (è una forma bilin. su W)

Def Diremo che W è positivo se $b_{|W}$ è def. positiva.

Ex Se $\mathcal{B} = (v_1 \dots \dots v_n)$ t.c. $M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$ con k 1 nella diag.

Allora $W = L(v_1 \dots v_k)$ è positivo

Infatti se $w \in W$ $\quad w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$$b(w,w) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \alpha_j b(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 b(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \mapsto \begin{matrix}\text{se } w \neq 0 \\ \text{viene } > 0\end{matrix}$$

Def Diremo che W è negativo se $b_{|W}$ è def. negativa. (50)

Ex Se $\mathcal{B}=(v_1 \dots v_n)$ t.c. $M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$ con q -1 nella diag.

allora $L(v_{n-q+1} \dots v_n)$ è negativo

Se prendo $L(v_1, \dots, v_{n-q}) = W$ $b_{|W}$ semi definita positiva cioè $b_{|W}(w,w) \geq 0$.

$$b_{|W}(w,w) = \sum_{i,j=1}^{n-q} \alpha_i \alpha_j b(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n-q} \alpha_i^2 \underline{b(v_i,v_i)} \geq 0$$

$w \in W$ $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-q} v_{n-q}$

Prop Se $\mathcal{B}=(v_1 \dots v_n)$ t.c. $M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$ con k 1 nella diag.

Allora $W = L(v_1 \dots v_k)$ è positivo e k è la dim. massima di un sottosp. positivo

dim $W' = L(v_{k+1}, \dots, v_n)$ $b_{|W'}$ è semidef. neg. Se esistesse un sottosp. positivo $\overline{W}$ di dim $> k$ allora

$$n \geq \dim(\overline{W} + W') = \dim \overline{W} + (n-k) - \dim(\overline{W} \cap W') \qquad \dim(\overline{W} \cap W') \geq \dim(\overline{W}) - k > 0$$

Preso $u \neq 0$ $u \in \overline{W} \cap W'$ $b(u,u) > 0$ perché $u \in \overline{W}$ $b(u,u) \leq 0$ perché $u \in W'$ **ASSURDO**

Def Data una forma bilinere b su V $\dim V = n$ si chiama SEGNATURA di b la terna (b_+, b_0, b_-) dove

$b_+ =$ massima dim. di un sottosp. positivo

$b_0 = \dim \operatorname{Rad}(b)$

$b_- =$ max dim. di un sottosp. negativo.

Se $\mathcal{B} = (v_1 \dots v_n)$ è una base risp. alla quale $M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$

allora $b_+ = n°$ degli 1 $b_0 = n°$ degli 0 $b_- = n°$ dei -1.

$b_+ + b_0 + b_- = n$

Oss b è def. positiva $\Leftrightarrow$ segnatura è $(n,0,0)$

" semidef " $\Leftrightarrow$ " $(b_+, b_0, 0)$

b non degenere $\Leftrightarrow$ $b_0 = 0$

b def neg. $\Leftrightarrow$ $(0,0,n)$

⋮

<u>Ex</u> Se b è degenere $\mathrm{Rad}(b) \neq (0)$

$\forall\, W$ sottosp. $\mathrm{Rad}(b) \subseteq W^{\perp_b}$

quindi $(W^{\perp_b})^{\perp_b} \supseteq \mathrm{Rad}(b)$

Se $W \not\supseteq \mathrm{Rad}(b) \Rightarrow (W^{\perp_b})^{\perp_b} \neq W$

$\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ semidef. pos. $\cdot\, W = L(2,3)$

$W^{\perp_b} = \{(a,b) : b((a,b),(2,3)) = 0\} = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\} = L(1,1)$

$b((a,b),(2,3)) = (a,b)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (a,b)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -a+b$

$(W^{\perp_b})^{\perp_b} = \{(a,b) : b((a,b),(1,1)) = 0\} = \mathbb{R}^2$

$b((a,b),(1,1)) = (a,b)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a,b)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex Calcolare la segnatura di b su $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\mathcal{B}$ base di versori $= (e_1, e_2, e_3)$

(e_1+e_2, e_2, e_3)

$$\frac{1}{\sqrt{b(e_1, e_1)}}$$

$$b(e_1+e_2, e_1+e_2) = b(e_1, e_1) + 2b(e_1, e_2) + b(e_2, e_2) = 2$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$b(v_1, e_2) =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = e_2 - b(v_1, e_2)v_1 = e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 =$$

$$(0,1,0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$b(u_2, u_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1/2}} u_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$v_3 \in \mathrm{Rad}(b)$ soluz. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad x_2 = 0 \quad x_3 = -x_1 \quad (1, 0, -1)$

$\mathcal{B}' = (v_1, v_3, v_2)$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ segnatura $(1,1,1)$

<u>Oss</u> Ogni sottosp. positivo W è contenuto in un sottosp. positivo di dim. massima $\bar{k}$

W base $(v_1 \dots v_k)$ $\qquad k <$ dim massima di un sottosp. positivo

ampliamo a $(v_1 \dots v_k \; v_{k+1} \dots v_n)$ base di V

e applichiamo Gram-Schmidt $\Rightarrow$ $(\underline{v'_1 \dots v'_k} \; v'_{k+1} \dots v'_n)$

$W = L(v'_1 \dots v'_k) \subseteq L(v'_1 \dots v'_k \; v'_{k+1} \; v'_{\bar{k}})$
sottosp. positivo
di dim massima

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

b def. positiva

$W \subseteq V$ sottosp. $(w_1 - w_k)$ base di W

$(w_1 \dots w_k\ w_{k+1} \dots w_n)$ base di V

$\Downarrow$ GS

$(v_1 \dots v_k\ v_{k+1} \dots v_n)$ base ortonorm.

$$W = L(v_1 \dots v_k)$$

Prop

$$W^{\perp_b} = L(v_{k+1} \dots v_n)$$

$u \in L(v_{k+1}, \dots, v_n)$ $\quad u = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$

$$b(v_1, u) = b(v_1, \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_{k+1} \underset{0}{\underset{\parallel}{b(v_1, v_{k+1})}} + \dots + \alpha_n \underset{0}{\underset{\parallel}{b(v_1, v_n)}} = 0$$

$\Rightarrow u \perp_b v_1$

Per lo stesso motivo $u \perp_b v_2 \dots u \perp_b v_k \Rightarrow u \in W^{\perp_b}$

Viceversa $u \in W^{\perp_b}$ $\quad u = \underbrace{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k}_{i=1,\dots,k} + \beta_{k+1} v_{k+1} + \dots + \beta_n v_n$ facciamo vedere che $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$

$$0 = b(u, v_i) = b(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n, v_i) = \beta_1 b(v_1, v_i) + \dots + \beta_n b(v_n, v_i) = \beta_i b(v_i, v_i) = \beta_i$$

perché $u \in W^{\perp_b}$ $\quad \Rightarrow u \in L(v_{k+1}, \dots, v_n)$

Caral. W $\quad W^{\perp_b}$ $\quad (W^{\perp_b})^{\perp_b} \supseteq W$

– Se b è def. positiva $\Rightarrow$ $(W^{\perp_b})^{\perp_b} = W$

dim

$\dim W^{\perp_b} + \dim (W^{\perp_b})^{\perp_b} = n \Rightarrow \dim (W^{\perp_b})^{\perp_b} = \dim W$

$\dim W^{\perp_b} + \dim W = n \nearrow$

$\Downarrow$

$W = (W^{\perp_b})^{\perp_b}$

b def. pos.

$W \quad W^{\perp_b}$

- dim spazio soluz. sist. omog. $= n^\circ$ incognite – rango A

perfect pairing $\Rightarrow$

- $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim$ dominio

- $(W^{\perp_b})^{\perp_b} = W$ se b def. positiva

b = prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$

W ~~...~~ base $\mathcal{B} = (v_1 \dots v_k)$ $\qquad v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ $\quad i = 1, \dots, k$

$W^\perp = v_1^\perp \cap \dots \cap v_k^\perp$ $\qquad v_1^\perp = \{(x_1 \dots x_n) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0\}$

$\vdots$

$v_k^\perp = \{(x_1 \dots x_n) : a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0\}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{k1} & & a_{kn} \end{pmatrix} = A$$

sist. lin. omog.

dim soluz = n - rango A = n - dim W

---

b def. positiva $\Rightarrow$ b è il prodotto scalare risp. a una base ortonorm.

In particolare (b def. positiva)

Prop $\underset{k}{\dim W} + \underset{n-k}{\dim W^{\perp_b}} = \dim V$

$$\dim(W + W^{\perp_b}) = \underset{k}{\dim W} + \underset{n-k}{\dim (W^{\perp_b})} - \underset{0}{\dim (W \cap W^{\perp_b})}$$

$\Leftarrow$

$\dim(W + W^{\perp_b}) = n$

$\Downarrow$

$W \oplus W^{\perp_b} = V$

$W \cap W^{\perp_b} = (0)$

perché se $w \in W \cap W^{\perp_b}$ $w \neq 0$

allora $b(w,w) = 0$ impossibile

ogni u si scrive in modo unico come

$$u = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{u_1} + \underset{\substack{\Uparrow \\ W^{\perp_b}}}{u_2}$$

b simm $\quad V \quad \mathcal{B} \quad M_b^{\mathcal{B}} = M_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$

$v \in V \quad (f(v))_{\mathcal{B}} = M_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}} \, v_{\mathcal{B}}$

$$b(w,v) = (w_{\mathcal{B}})^t \underbrace{M_b^{\mathcal{B}} \, v_{\mathcal{B}}} = (w_{\mathcal{B}})^t f(v)_{\mathcal{B}} = w_{\mathcal{B}} \cdot f(v)_{\mathcal{B}}$$

$$\parallel$$

$$b(v,w) \qquad\qquad = v_{\mathcal{B}} \cdot f(w)_{\mathcal{B}}$$

Se v è autovettore di f risp. all'autovalore α

$$\forall w \quad b(w,v) = w_{\mathcal{B}} \cdot f(v)_{\mathcal{B}} = w_{\mathcal{B}} \cdot (\alpha v)_{\mathcal{B}} = \alpha (w_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}})$$

Conseguenze

- $b(v,v) = \alpha(v_B \cdot v_B) = 0$ se $\alpha = 0$

tutti gli autovettori dell'autovalore 0 sono isotropi

Infatti Autospazio di 0 = $\ker f$ = $\mathrm{Rad}(b)$

- $v \neq 0$ $b(v,v) = \alpha(v_B \cdot v_B) > 0$ se $\alpha > 0$

- $v \neq 0$ $b(v,v) = \alpha(v_B \cdot v_B) < 0$ se $\alpha < 0$

Corol Se b è def. positiva, tutti gli autoval. sono positivi
" negativa " " negativi

- b è degenere $\Leftrightarrow$ 0 è autoval.

se b è semidef. positiva tutti gli autoval. sono ≥ 0
" negativa " ≤ 0

Prop Se ~~xxxx~~ v_1 è un autovett. di $M_b^{\mathcal{B}}$ risp. a α_1
v_2 " " " α_2 $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Allora $b(v_1, v_2) = 0$ cioè $v_1 \perp_b v_2$

dim $b(v_1, v_2) = \alpha_2 \left((v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}}\right) = \alpha_1 \left((v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}}\right) = b(v_2, v_1) = 0$

$$\alpha_2 \left((v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}}\right) - \alpha_1 \left((v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}}\right) = 0$$

$$\underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\neq 0} \left(\left((v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}}\right)\right) = 0 \implies (v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}} = 0$$

---

b $M_b^{\mathcal{B}}$ simm. $\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_k$ autoval.
$A_1 \qquad A_k$ autospazi
$\dim A_1 + \cdots + \dim A_k = \dim V$

Se $\alpha_1 > 0$ $\forall\, v \in A_1,\ v \neq 0$ $b(v, v) = \alpha_1 (v_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}) > 0$
cioè A_1 è un sottosp. positivo

Se $\alpha_1 < 0$ A_1 sottosp. negativo

Prop $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0 \Rightarrow b$ def. positiva

$A_1, \dots, A_k$ sono sottosp. positivi

$b|_{A_1}$ è def. positiva $\quad v_{11}, \dots, v_{1n_1} \quad n_1 = \dim A_1$
base ortonorm. di $b|_{A_1}$

$\vdots$

$b|_{A_k}$ " $\quad v_{k1}, \dots, v_{kn_k} \quad n_k = \dim A_k$
base ortonorm di $b|_{A_k}$

$\mathcal{B} = (v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots\dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k})$ base di V

base ortonorm di V

$v, w \in \mathcal{B}$ se sono autovett. di autov. diversi
$\Rightarrow$ sono $\perp_b$
se sono autovett. di α_i
$b(v,w) = 0$ a meno che $v=w$ $\quad b(v,v)=1$

$\Rightarrow b$ è def. positiva

Similmente

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \iff b$ semidef. positiva

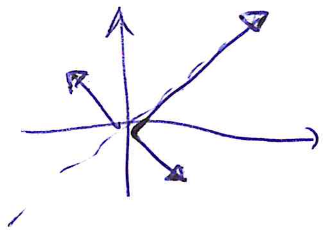
$\alpha_1 \dots \alpha_n < 0 \iff b$ def. neg.

$\alpha_1 \dots \alpha_n \leq 0 \iff b$ semidef. negativa

—

Es

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^2$



$\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha^2 - 1 = 0$ $\alpha = \pm 1$

non è definita

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ $\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1$ $\lambda^2 - 4\lambda + 3$

def. pos. $\lambda = 1$ $\lambda = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4$ $\lambda^2 - 2\lambda - 3$

$\lambda = 3$ $\lambda = -1$

non è def.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5)$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda \qquad \underbrace{-\lambda^3 + 6\lambda^2}_{>0}\underbrace{-10\lambda}_{>0}\underbrace{+5}_{>0}$$

déf. positive

$$\underbrace{-\lambda^3}_{<0} - 2\lambda^2 + 1$$