Def Data una forma bilin. b su V

$v \in V$ si chiama

1) ISOTROPO se $b(v,v)=0$

2) RADICALE se $b(v,w)=0 \quad \forall w \in V$

Radicale $\Rightarrow$ Isotropo

Isotropo $\not\Rightarrow$ Radicale

$$\mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M_b^{\mathcal{B}} \qquad \mathcal{B}=(v_1,v_2)$$

v_1 è isotropo perché $b(v_1,v_1)=0$

v_1 non è radicale perché $b(v_1,v_2)=1$

Def $Rad(b)=\{v : v \text{ è Radicale}\} \ni 0$

Prop Rad(b) è un sottospazio

dim $v_1, v_2 \in \mathrm{Rad}(b)$ $\qquad v_1+v_2 \overset{?}{\in} \mathrm{Rad}(b)$

$\Downarrow$

$\forall w \quad b(v_1,w)=0$, $\; b(v_2,w)=0 \longrightarrow$

$$b(v_1+v_2, w) = 0 \quad \forall w\,?$$

$$b(v_1+v_2,w) = b(v_1,w) + b(v_2,w) = 0 + 0 = 0$$

$\Uparrow$

$v_1 \in \mathrm{Rad}(b)$

$\alpha v_1 \overset{?}{\in} \mathrm{Rad}(b) \quad \forall \alpha \in K$

$$b(\alpha v_1, w) = 0 \quad \forall w\,?$$

$$b(\alpha v_1, w) = \alpha\, b(v_1,w) = 0$$

$M_b^{\mathcal{B}}$

$$v \in \mathrm{Rad}(b) \iff (M_b^{\mathcal{B}})^t v_{\mathcal{B}} = 0$$

$$\dim \mathrm{Rad}(b) = \dim V - \text{rango}\,(M_b^{\mathcal{B}})^t = \dim V - \text{rango}\,(M_b^{\mathcal{B}})$$

f = endomorf. associato $(M_b^{\mathcal{B}})^t$ risp. a $\mathcal{B}$ $\qquad \mathrm{Rad}(b) = \operatorname{Ker} f$

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(f)$$

<u>Oss</u> $\operatorname{Rad}(b) = (0) \iff b$ è non-degenere cioè

$\det M_b^{\mathcal{B}} \neq 0 \iff$ rango $M_b^{\mathcal{B}} = n = \dim V$.

Forme $\boxed{\text{simmetriche}}$

<u>Def</u> Diremo che b è DEFINITA se 0 è l'unico elem. isotropo.
Cioè b è definita se $\forall v \neq 0 \Rightarrow b(v,v) \neq 0$

<u>Ex</u> $\mathbb{R}^n$ prodotto scalare è definito.

$$(a_1, \dots a_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \iff a_1 = \dots = a_n = 0$$

$\mathbb{C}^n$ prodotto scalare non definito $\quad (1,i) \cdot (1,i) = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Def b è definita positiva se $\forall v \neq 0 \Rightarrow b(v,v) > 0$

" negativa se $\forall v \neq 0 \Rightarrow b(v,v) < 0$

Ex $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = -a_1 b_1 - \dots - a_n b_n$

prodotto scalare $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

Ex $\{\text{vettori isotropi}\} = I$

(2) $v_1 \in I \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha v_1 \in I \quad \forall \alpha \in K$? ok

$b(v_1, v_1) = 0$ $\qquad b(\alpha v_1, \alpha v_1) = \alpha^2 \underbrace{b(v_1, v_1)}_{0} = 0$

(1) $v_1, v_2 \in I$ $\qquad v_1 + v_2 \in I$?

$b(v_1, v_1) = 0$ $\qquad b(v_1 + v_2, v_1 + v_2) \stackrel{?}{=} 0$

$b(v_2, v_2) = 0$ $\qquad = b(v_1, v_1) + b(v_2, v_2) + 2\, b(v_1, v_2)$

Ex $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \{$vettori isotropi$\}$ NON è sottospazio

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ $b(v_1, v_1) = 0$ $b(v_2, v_2) = 0$

$$b(v_1+v_2, v_1+v_2) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{b(v_1, v_1)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{b(v_2, v_2)} + 2\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{b(v_1, v_2)} \neq 0.$$

Oss Se $M_b^{\mathcal{B}}$ ha uno 0 sulla diagonale $\underset{\substack{\parallel \\ b(v_i, v_i)}}{a_{ii}} = 0$

b <u>NON</u> è definita

Se $M_b^{\mathcal{B}}$ ha un elem. negativo sulla diag. $\underset{\substack{\parallel \\ b(v_i, v_i)}}{a_{ii}} < 0$

b <u>NON</u> è def. positiva

Ex $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $b(v_1+v_2, v_1+v_2) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{b(v_1, v_1)} + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{b(v_2, v_2)} + 2\underset{\substack{\parallel \\ -4}}{b(v_1, v_2)} = -2 < 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $b(v_1-v_2, v_1-v_2) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{b(v_1, v_2)} + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{b(v_2, v_2)} - 2\underset{\substack{\parallel \\ -4}}{b(v_1, v_2)} = -2 < 0$

V su $\mathbb{R}$ $\quad b$ simm

Teor Se b è definita allora o è def. positiva o è def. negativa.

dim $\quad b$ non def. pos. $\quad$ non def. neg.

$\exists v \neq 0$ t.c. $b(v,v) \leq 0$ $\qquad \exists w \neq 0$ t.c. $b(w,w) \geq 0$

se $b(v,v)=0$ oppure $b(w,w)=0 \Rightarrow b$ non def OK

$b(v,v)<0$ e $b(w,w)>0$

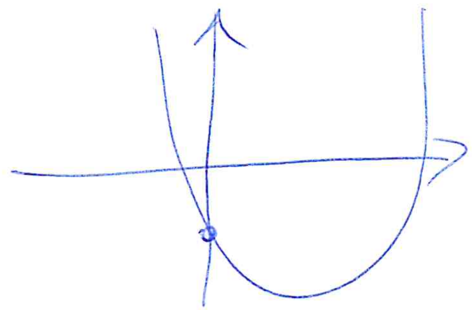
$v+\alpha w$

$$b(v+\alpha w, v+\alpha w) = b(v,v) + 2\alpha\, b(v,w) + \alpha^2 b(w,w)$$

per $\alpha=0 \Rightarrow$ valore negativo

per $\alpha \gg 0 \Rightarrow$ valore positivo

$\mapsto \exists \alpha$ t.c. $b(v+\alpha w, v+\alpha w)=0$



OK

teor. perm. segno

Oss Se nella diagonale ci sono valori positivi e valori negativi allora b non è definita.

Oss Data $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ trovare un vettore isotropo v non nullo.

$\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}$= versori

$v=(\alpha,\beta)$ $\quad b((\alpha,\beta),(\alpha,\beta))=0$

$$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha+2\beta,\ 2\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2+4\alpha\beta-\beta^2$$

$$\alpha = -2\beta \pm \sqrt{4\beta^2+\beta^2} = -2\beta \pm \beta\sqrt{5} = (-2\pm\sqrt{5})\beta$$

$((-2+\sqrt{5})\beta,\beta)$ sono isotropi

$\quad\ \ \parallel$

$\{\beta(-2+\sqrt{5},1)\quad , \quad \beta(-2-\sqrt{5},1)\ :\ \beta\in\mathbb{R}\}$

$V \qquad \mathcal{B} = (v_1 \ldots v_n) \qquad b(v,w) = v_{\mathcal{B}} \cdot w_{\mathcal{B}}$

$$b(v_1, v_2) = (v_1)_{\mathcal{B}} \cdot (v_2)_{\mathcal{B}} \qquad (v_1)_{\mathcal{B}} = (1, 0, \ldots 0)$$

$$\overset{\Uparrow}{}$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ 0 \end{array} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} v_1 = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\ v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \ldots + 0v_n \\ (v_2)_{\mathcal{B}} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

$$b(v_1, v_1) = 1$$

$\forall i,j \quad i \neq j \quad b(v_i, v_j) = 0 \qquad v_i \perp_b v_j \qquad \mathcal{B}$ è ORTOGONALE risp. a b

$b(v_i, v_i) = 1 \qquad \|v_i\|_b = 1 \qquad \mathcal{B}$ è ORTONORMALE risp. a b

Def b forma bilin. su V ~~(su R)~~ $\mathcal{B}$ base $= (v_1, \dots, v_n)$

Diremo che $\mathcal{B}$ è

- ORTOGONALE risp. a b se $b(v_i, v_j) = 0$ quando $i \neq j$
- se inoltre $b(v_i, v_i) = 1$ $\forall i$ allora $\mathcal{B}$ è ORTONORMALE

Esistono basi ortogonali o ortonormali?

Prop b forma bilin. su V (su $\mathbb{R}$) $\mathcal{B}$ base ortonormale
$\Rightarrow$ b è definita positiva

dim $\mathcal{B}$ base ortonorm. $= (v_1 \dots v_n)$ $\forall v$ $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$b(v,v) = \sum a_i a_j b(v_i, v_j) = \sum a_i^2 b(v_i, v_i)$$
$$= \sum a_i^2 \geq 0$$

e viene 0 solo se $v = 0$

Oss $\mathcal{B}$ è base ortonormale per b $\iff$ $M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$

$\mathcal{B}$ è base ortogonale per b $\iff$ $M_b^{\mathcal{B}}$ è diagonale

Ex $M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b non è def. positiva / " " negativa però $\mathcal{B}$ ortogonale

$M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b degenere però $\mathcal{B}$ è ortogonale

Problema Data b trovare una base ortogonale cioè trovare $\mathcal{B}$ t.c. $M_b^{\mathcal{B}}$ è diagonale

$M_b^{\mathcal{B}'} \Rightarrow M_b^{\mathcal{B}}$ diagonale ?

Cambiamento di base in $M_b^{\mathcal{B}}$

$$\forall\, v, w \qquad b(v,w) = v_{\mathcal{B}}^t\, M_b^{\mathcal{B}}\, w_{\mathcal{B}}$$

$$b(v,w) \qquad v_{\mathcal{B}'}^t\, M_b^{\mathcal{B}'}\, w_{\mathcal{B}'}$$

$$v_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}'} \qquad w_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, w_{\mathcal{B}'}$$

$$\forall v,w \quad b(v,w) = v_{\mathcal{B}}^t\, M_b^{\mathcal{B}}\, w_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}'}\right)^t M_b^{\mathcal{B}} \left(M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}'}\right)$$

$$\| \qquad = (v_{\mathcal{B}'})^t \left(M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^t M_b^{\mathcal{B}} \left(M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}'}\right) =$$

$$\cancel{v_{\mathcal{B}'}^t}\, M_b^{\mathcal{B}'}\, \cancel{w_{\mathcal{B}'}} = \cancel{(v_{\mathcal{B}'})^t} \left[\left(M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^t M_b^{\mathcal{B}}\, M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right] \cancel{w_{\mathcal{B}'}}$$

$$M_b^{\mathcal{B}'} = \left(M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^t M_b^{\mathcal{B}}\, M^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Def Diremo che due matrici M_1 M_2 sono CONGRUENTI se $\exists$ A invertibile t.c.

$$M_2 = A^t M_1 A$$

Prop $M_b^{\mathcal{B}'}$ $M_b^{\mathcal{B}}$ sono congruenti. Inoltre se M è congruente $M_b^{\mathcal{B}}$ allora $\exists$ base $\mathcal{B}'$ t.c. $M = M_b^{\mathcal{B}'}$

Problema Data b e una base quindi data $M_b^{\mathcal{B}}$ $\exists$ M congruente a $M_b^{\mathcal{B}}$ e diagonale?

Se $\exists$, trovo $\mathcal{B}'$ ortogonale risp. a b.

Oss Siano $v_1 \dots v_n$ t.c.

$$b(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $v_1 \dots v_n$ sono lin. indip.

dim $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$

$$\forall i \quad 0 = b(0, v_i) = b(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{b(v_j, v_i)}$$

$$= a_i \, b(v_i, v_i) = a_i$$

W sottosp. $\qquad W^{\perp_b} = \{ v : v \perp_b w \quad \forall w \in W \}$

$W = \{w\} \qquad w^{\perp_b} = \{ v : v \perp_b w \}$

$$v \perp_b w \Rightarrow \underbrace{v_{\mathcal{B}}^t \, M_b^{\mathcal{B}} \, w_{\mathcal{B}}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

$(x_1 \dots x_n) = v_{\mathcal{B}}^t \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = M_b^{\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}}$

$w^{\perp_b}$ è un sottosp.

- se $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$ $\dim w^{\perp_b} = n$ cioè $w^{\perp_b} = V$ $\quad w \in \mathrm{Rad}(b)$
- se $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq 0$ $\quad \dim w^{\perp_b} = n-1$

<u>Ex</u> $\quad M_b^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad w = (-2, 6) \qquad w^{\perp_b} = \{ (x,y) : 10x + 14y = 0 \}$

$\mathcal{B}$ versori

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \| \qquad \{ (x,y) : y = -\tfrac{5}{7} x \}$$

$$= \{ (x, -\tfrac{5}{7} x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$L(1, -\tfrac{5}{7}) = \{ x (1, -\tfrac{5}{7}) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$L(w)^{\perp_b} = \{ v : \ v \perp_b w' \quad \forall w' \in L(w) \}$$

$$\Leftarrow \qquad \Leftrightarrow \ \beta w = w'$$

$$0 = b(v, w')$$

$$\parallel$$

$$b(v, \beta w) = \beta\, b(v, w) \qquad \Longrightarrow \qquad L(w)^{\perp_b} = w^{\perp_b}$$

$$L(w_1, w_2)^{\perp_b} = \{ v : \ v \perp_b w' \ \forall w' \in L(w_1, w_2) \}$$

$$\Updownarrow$$

$$w' = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

$$\forall \beta_1, \beta_2 \qquad v \perp_b \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = b(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \underline{\beta_1 b(v, w_1) + \beta_2 b(v, w_2)}$$

$$\beta_1 = 1 \ \beta_2 = 0 \ \Rightarrow \ b(v, w_1) = 0$$
$$\beta_1 = 0 \ \beta_2 = 1 \ \Rightarrow \ b(v, w_2) = 0$$

viceversa

$$b(v, w_1) = 0, \ b(v, w_2) = 0 \ \Rightarrow \ \forall \beta_1, \beta_2 \ \ v \perp_b \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

$$\Downarrow$$

$$L(w_1, w_2)^{\perp_b} = w_1^{\perp_b} \cap w_2^{\perp_b}$$

$\dim L(w_1, w_2)^{\perp_b}$ — se $w_1, w_2 \in Rad(b)$ n
— se $w_1 \in Rad(b)$ $w_2 \notin Rad(b)$ $n-1$
— se $w_1 \notin Rad(b)$ $w_2 \in Rad(b)$ $n-1$
— se $w_1, w_2 \notin Rad(b)$

$\dim L(w_1, w_2) \leq 2$

$$L(w_1, w_2)^{\perp_b} = \underset{n-1}{w_1^{\perp_b}} \cap \underset{n-1}{w_2^{\perp_b}}$$

$$\dim(w_1^{\perp_b} \cap w_2^{\perp_b}) = \underset{n-1}{\dim(w_1^{\perp_b})} + \underset{n-1}{\dim(w_2^{\perp_b})} - \dim(w_1^{\perp_b} + w_2^{\perp_b})$$

$\dim(w_1^{\perp_b} \cap w_2^{\perp_b})$: $n-1$ se $w_1^{\perp_b} = w_2^{\perp_b}$; $n-2$

$\dim(w_1^{\perp_b} + w_2^{\perp_b})$: n; $n-1$ se $w_1^{\perp_b} = w_2^{\perp_b}$

—

se $\dim L(w_1, w_2) = 2$ cioè w_1, w_2 lin. indip.

$\dim L(w_1, w_2)^{\perp_b} = n-2$ a meno che $w_1^{\perp_b} = w_2^{\perp_b}$

Oss Se $b(w_2,w_2)\neq 0$ cioè w_2 non isotropo

$$u = w_1 - \frac{b(w_1,w_2)}{b(w_2,w_2)} w_2 \in L(w_1,w_2) \qquad u \perp_b w_2$$

$$b(u,w_2) = b\left(w_1 - \frac{b(w_1,w_2)}{b(w_2,w_2)} w_2, w_2\right) =$$

$$= b(w_1,w_2) - \frac{b(w_1,w_2)}{\cancel{b(w_2,w_2)}} \cancel{b(w_2,w_2)} = 0$$

Prop Se b è definita e $w_1\, w_2$ sono lin. indip.

Allora $w_1^{\perp_b} \neq w_2^{\perp_b}$. Quindi $L(w_1,w_2)^{\perp_b}$ ha dim. $n-2$.

dim $b(w_2,w_2)\neq 0$ quindi $\exists\, u$ come sopra. $u\neq 0$ perché w_1,w_2 lin. indip.

$$0\neq b(u,u) = b(u,w_1) - \frac{b(w_1,w_2)}{b(w_2,w_2)} b(u,w_2) = b(u,w_1)$$ cioè $u\notin w_1^{\perp_b}$ ma $u\in w_2^{\perp_b}$.

$$L(w_1, w_2)^{\perp_b} = w_1^{\perp_b} \cap w_2^{\perp_b}$$

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0}_{\Downarrow \text{ da } w_1^{\perp_b}} \qquad \underbrace{\alpha'_1 x_1 + \dots + \alpha'_n x_n = 0}_{\Downarrow \text{ da } w_2^{\perp_b}}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \\ \alpha'_1 x_1 + \dots + \alpha'_n x_n = 0 \end{cases} \quad \text{lin. indip.}$$

---

b definita

$L(w_1, w_2, w_3)$ di dim. 3 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\dim L(w_1, w_2, w_3)^{\perp_b} = n - 3$

$$\| \\ w_1^{\perp_b} \cap w_2^{\perp_b} \cap w_3^{\perp_b}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \\ \alpha'_1 x_1 + \dots + \alpha'_n x_n = 0 \\ \alpha''_1 x_1 + \dots + \alpha''_n x_n = 0 \end{cases}$$

$L(w_1, \dots, w_k)$ di dim k $\Rightarrow$ $\dim L(w_1 \dots w_k)^{\perp_b} = n - k$?

Teor Sia b definita positiva. Allora esiste una base ortonormale per V

dim $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di V

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{b(w_1,w_1)}}\, w_1 \qquad b(v_1,v_1) = b\left(\frac{1}{\sqrt{b(w_1,w_1)}} w_1, \frac{1}{\sqrt{b(w_1,w_1)}} w_1\right) =$$

$$\frac{1}{\cancel{\sqrt{b(w_1,w_1)}}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{b(w_1,w_1)}}}\, \cancel{b(w_1,w_1)} = 1$$

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ base

$$u_2 = w_2 - b(v_1,w_2)\, v_1 \qquad b(v_1,u_2) = b(v_1,w_2) - b(v_1,w_2)\underbrace{b(v_1,v_1)}_{1} = 0$$

$$\mathcal{B}'_2 = \{v_1, u_2, w_3, \dots, w_n\} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{b(u_2,u_2)}}\, u_2 \qquad b(v_2,v_2) = 1$$

$$b(v_2,v_1) = \frac{1}{\sqrt{\ }}\, \underbrace{b(u_2,v_1)}_{0}$$

$\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, w_3, \dots, w_n\}$

$$u_3 = w_3 - b(v_1, w_3)v_1 - b(v_2, w_3)v_2$$

$$b(v_1, u_3) = b(v_2, u_3) = 0$$

$$\underbrace{b(v_1, w_3) - b(v_1, w_3)}\, b(v_1, v_1) - \cancel{b(v_2, v_1)}\, b(v_2, v_2) = 0$$

$$\mathcal{B}'_3 = \{v_1, v_2, u_3, w_4, \dots, w_n\} \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{b(u_3, u_3)}}\, u_3 \qquad b(v_3, v_3) = 1$$

$$\mathcal{B}_3 = \{v_1, v_2, v_3, w_4, \dots, w_n\}$$

$$u_4 = w_4 - b(v_1, w_4) - b(v_2, w_4) - b(v_3, w_4)$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{b(u_4, u_4)}}\, u_4$$

$$\mathcal{B}_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, w_5, \dots, w_n\}$$

$$\dots\dots\dots \Rightarrow \mathcal{B}_n = \{v_1, \dots, v_n\}$$ base ortonorm.

procedimento di Gram-Schmidt