Dualità proiettiva

$\{$rette del piano$\}$

$$Ax + By + C = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(A, B, C)$$

$$y = mx + q \longleftrightarrow (m, q) \ ?$$

$\{$rette non verticali$\}$

$\{$rette del piano proiettivo$\}$

$$Ax + By + C = 0$$

$$A\frac{x_1}{x_0} + B\frac{x_2}{x_0} + C = 0$$

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_0 = 0$$

$$(0,0,1) \longrightarrow ? \quad 1 = 0$$

$(0,0,1) \rightsquigarrow \quad x_0 = 0$ retta all'∞

$(0,0,0) \rightsquigarrow ?$

$r \quad Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C)$

$2Ax + 2By + 2C = 0 \quad (2A, 2B, 2C)$

$\forall k \neq 0 \quad kAx + kBy + kC = 0 \quad (kA, kB, kC)$

$\{$rette piano proiettivo reale$\}$ $= \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}/\sim \ = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$(A, B, C) \sim (kA, kB, kC) \ \forall k \neq 0$

$\boxed{\text{PIANO DUALE}}$

Coordinate di r in $\mathbb{P}^2$ duale $= (A,B,C)$

$Ax_1 + Bx_2 + Cx_0 = 0$

$$\mathbb{P}^2 \text{ duale} = (\mathbb{P}^2)^\vee$$

punti di $(\mathbb{P}^2)^\vee \iff$ rette $\mathbb{P}^2$

rette di $(\mathbb{P}^2)^\vee \iff$?

rette di $(\mathbb{P}^2)^\vee = \{ (A,B,C) : \underbrace{\alpha A + \beta B + \gamma C = 0}_{\text{eq. di I° grado}} \}$

$= \{$ rette $Ax_1 + Bx_2 + Cx_0 = 0$ t.c. (A,B,C) soddisfano $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \}$.

$= \{$ fascio di rette per $(\gamma, \alpha, \beta) \in \mathbb{P}^2 \}$

$\updownarrow$

punti di $\mathbb{P}^2$

In $\mathbb{P}^2$

per due punti distinti passa una sola retta

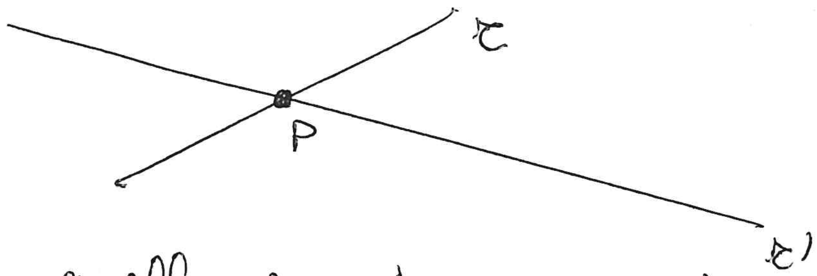
In $\mathbb{P}^{2\vee}$

per due punti distinti passa una sola retta

$\Downarrow$

per due rette di $\mathbb{P}^2$ passa un unico fascio di rette

cioè due rette distinte si incontrano in uno e un solo punto $\Longleftrightarrow$



quello passante per $r \cap r'$

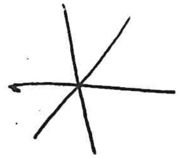
$y = mx + q$ $\longleftrightarrow$ trascurare le rette verticali $\longleftrightarrow$ trascurare nel piano duale il fascio di rette per $(0,0,1)$

$\Updownarrow$

(m,q)

piano affine

Tre punti allineati in $(\mathbb{P}^2)^\vee$ $\longleftrightarrow$ Tre rette concorrenti in $\mathbb{P}^2$



$\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

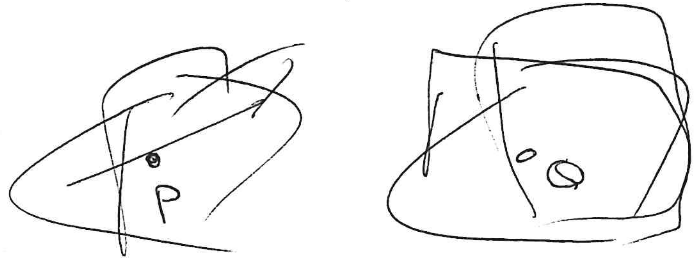
$$\{\text{piani di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}\} = \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}/\sim \;= \mathbb{P}^3 \text{ duale} = (\mathbb{P}^3)^\vee$$

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_0 = 0$$
$$\rightsquigarrow$$
$$(A, B, C, D)$$

$\mathbb{P}^3$		$(\mathbb{P}^3)^\vee$
piano	$\longleftrightarrow$	punto
fasci di piani per rette ($\cap$ piani)	$\longleftrightarrow$	~~fasci di rette~~ rette
"fasci" di piani per un punto	$\longrightarrow$	piani

$$(A\,B\,C\,D) \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$$

$$\boxed{\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\delta, \alpha, \beta, \gamma) \in \text{piano}$$



Per 3 punti non allin passa uno e un solo piano

$\Updownarrow$

3 piani non per una retta fissa contengono (insieme) uno e un solo punto

---

$\{ \underset{\text{in } \mathbb{P}^2}{\text{coniche}} \}$

$$A x_1^2 + B x_1 x_2 + C x_2^2 + D x_0 x_1 + E x_0 x_2 + F x_0^2 \longleftrightarrow (A \ B \ C \ D \ E \ F)$$

$$\mathbb{R}^6 - \{(0 \cdots 0)\} / \sim \ = \mathbb{P}^5$$

$$\{ \underset{\text{in } \mathbb{P}^3}{\text{quadriche}} \} = \mathbb{P}^9$$

$\mathbb{P}^5$ coniche $\supseteq$ coniche degeneri

$\updownarrow$ $\det M = 0$

ipersuperficie di 3° grado

$(A\ B\ C\ D\ E\ F)$

$\updownarrow$

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 & E/2 \\ B/2 & C & D/2 \\ E/2 & D/2 & F \end{pmatrix} = \{\text{matrici simmetriche } 3\times 3\}$$

$\mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{matrici simm.} \\ 3\times 3\end{pmatrix}$

In $\mathbb{P}^5$ $\supseteq$ coniche doppiamente degeneri = rette doppie

$y_0 \dots y_6$ $= \{\text{rette}\} = (\mathbb{P}^2)^\vee$ piano

$Ax_1 + Bx_2 + Cx_0$ $\quad (A, B, C) \longrightarrow (A^2, 2AB, B^2, 2AC, 2BC, C^2)$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \quad \overset{\shortparallel}{y_0} \quad \overset{\shortparallel}{y_1} \quad \overset{\shortparallel}{y_2} \quad \overset{\shortparallel}{y_3} \quad \overset{\shortparallel}{y_4} \quad \overset{\shortparallel}{y_5}$

$A^2x_1^2 + 2AB\,x_1x_2 + B^2x_2^2 + 2AC\,x_1x_0 + 2BC\,x_2x_0 + C^2x_0^2$

superficie di VERONESE

$$A x_1^2 + B x_1 x_2 + C x_2^2 + D x_1 x_0 + E x_2 x_0 + F x_0^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{P}^5$$

Fasci di coniche rette del $\mathbb{P}^5$

$$\alpha\,(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1) + \beta\,(A_2\ B_2\ C_2\ D_2\ E_2\ F_2)$$

$$(\alpha A_1 + \beta A_2,\ \alpha B_1 + \beta B_2, \dots, \alpha F_1 + \beta F_2)$$

$$\alpha\left(A_1 x_1^2 + B_1 x_1 x_2 + C_1 x_2^2 + D_1 x_0 x_1 + E_1 x_0 x_2 + F_1 x_0^2\right) +$$

$$\beta\left(A_2 x_1^2 + B_2 x_1 x_2 + C_2 x_2^2 + D_2 x_0 x_1 + E_2 x_0 x_2 + F_2 x_0^2\right)$$

140

Ex

$$\mathscr{C}_1 \qquad\qquad \mathscr{C}_2$$
$$y = x^2 \qquad\qquad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\alpha(x^2 - y) + \beta(x^2 + y^2 - 1) = 0$$ Fascio di coniche.

Trovare le parabole del fascio e studiarle.

$$(\alpha+\beta)x^2 + \beta y^2 - \alpha y - \beta = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha/2 \\ 0 & -\alpha/2 & -\beta \end{pmatrix}$$

parabole $\iff$ $\det M_{33} = 0$ → $\beta = 0$; $\alpha = -\beta$

$$\det M_{33} = \beta(\alpha+\beta)$$

<u>$\beta = 0$</u> $\quad \alpha(x^2 - y) = 0$

una parabola

$$x^2 - y = 0$$
$$y = x^2 \quad \text{non-deg.}$$

<u>$\alpha = -\beta$</u> $\quad -\beta(x^2 - y) + \beta(x^2 + y^2 - 1) = 0$

$$\beta(y^2 + y - 1) = 0$$

una "parabola" degenere

due rette //

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta/2 \\ 0 & \beta/2 & -\beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

non semi-def

reali

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

fascio di coniche definito da C_1 y C_2

$x^2 + 2xy$

$x(x+2y)$

C_1

$2x = 0$

$2x_0 x_{[illegible]} = 0$

C_2

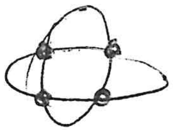
$(\alpha, \beta) \rightsquigarrow (1, k)$ mi dà tutto il fascio meno C_2

Dato un fascio di coniche $\alpha C_1 + \beta C_2$

$\forall P \in C_1 \cap C_2 \rightarrow P \in$ tutte le coniche del fascio

Tutte le coniche del fascio passano $C_1 \cap C_2$

- Viceversa tutte le coniche che passano per $C_1 \cap C_2$ stanno nel fascio
- $C_1 \cap C_2$ $\Big\}$ 2 eq. quadratiche



le soluzioni si studiano usando il fascio di coniche