Quadriche

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + L = 0$$

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad z = \frac{x_3}{x_0}$$

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_1x_3 + Dx_2^2 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 + \underline{Gx_1x_0 + Hx_2x_0 + Ix_3x_0 + Lx_0^2} = 0$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{array} & \begin{pmatrix} A & B/2 & C/2 & G/2 \\ B/2 & D & E/2 & H/2 \\ C/2 & E/2 & F & I/2 \\ G/2 & H/2 & I/2 & L \end{pmatrix} \neq 0 \end{array}$$

$\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

$$\longrightarrow M_{44} \begin{pmatrix} A & B/2 & C/2 \\ B/2 & D & E/2 \\ C/2 & E/2 & F \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = t'+1 \\ y = t'+2 \\ z = t'+3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} t &= t'+1 \\ t &= t'+2 \\ t &= t'+3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_0} = t \\ \dfrac{x_2}{x_0} = t \\ \dfrac{x_3}{x_0} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_0} = t'+1 \\ \dfrac{x_2}{x_0} = t'+2 \\ \dfrac{x_3}{x_0} = t'+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t x_0 \\ x_2 = t x_0 \\ x_3 = t x_0 \\ x_0 \text{ libera} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t' x_0 + x_0 \\ x_2 = t' x_0 + 2x_0 \\ x_3 = t' x_0 + 3x_0 \\ x_0 \text{ libera} \end{cases} \qquad \begin{cases} t x_0 = t' x_0 + x_0 \\ t x_0 = t' x_0 + 2x_0 \\ t x_0 = t' x_0 + 3x_0 \end{cases}$$

$$t x_0 = s \qquad t' x_0 = s'$$

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = s \\ x_0 \text{ libera} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = s' + x_0 \\ x_2 = s' + 2x_0 \\ x_3 = s' + 3x_0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (t' - t + 1)\, x_0 = 0 \\ (t' - t + 2)\, x_0 = 0 \\ (t' - t + 3)\, x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0$$

$(0, 1, 1, 1)$ $\quad$ $(0, s, s, s)$ $\quad$ $(0, s', s', s')$ $\quad$ $(0, 1, 1, 1)$

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$t' = x - 1$$
$$y = x - 1 + 2$$
$$z = x - 1 + 3$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_0 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_0 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_3 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to R_2 - R_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad R_4 \to 2R_3 - R_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{0} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \Rightarrow x_0 = 0 \end{array}$$

$(0, 1, 1, 1) \qquad (0, x_1, x_1, x_1)$

Quadriche in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

rango M:

- 4 quadriche non-degeneri
- 3 semplicemente degeneri (coni quadrici)
- 2 doppiamente degeneri (due piani)
- 1 triplamente degeneri (piano doppio)

rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

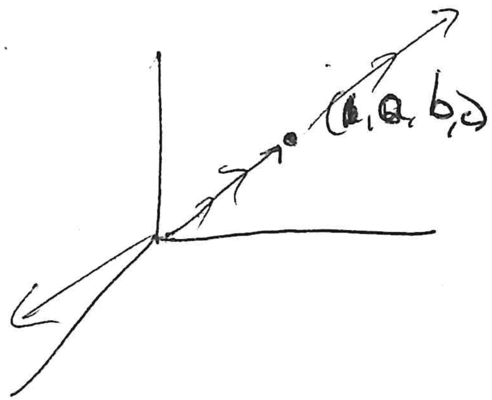
$(1, a, b, c) \in Q \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0$

$\Updownarrow$

$s \in \mathbb{C}$ $\quad (1, sa, sb, sc) \in Q \Leftarrow s^2a^2 + s^2b^2 - s^2c^2 = 0$

$s^2(a^2 + b^2 - c^2)$

↳ retta per O e per $(1, a, b, c)$



$\forall P \neq O \in Q \Rightarrow$ tutti i punti della retta per P e O $\in Q$

CONO di VERTICE l'ORIGINE (cono quadrico)

Polarità risp. a una quadrica

$$\begin{pmatrix} A & B/2 & C/2 & G/2 \\ B/2 & D & E/2 & H/2 \\ C/2 & E/2 & F & I/2 \\ G/2 & H/2 & I/2 & L \end{pmatrix} = M_b \qquad \text{non degenere}$$

cioè $w \perp_b v_P$

$P \in \mathbb{P}^3 \qquad (a_0\ a_1\ a_2\ a_3) = v_P \qquad P^\perp = \{ w = (\cancel{x_0}, \cancel{x_1}, \cancel{x_2}, x_3) : w^t M_b P = 0 \}$

sottospazio di dim 3

PIANO POLARE di P risp. a $Q = \Pi_P$

---

se $P \in Q \iff P$ è isotropo risp. a $b \iff P \in$ piano polare $= \Pi_P$

$b|_{\Pi_P} \qquad \{v_P, v_2, v_3\}$ base di Π_P

$b(v_P, v_P) = 0 \qquad b(v_P, v_2) = 0 \qquad b(v_P, v_3) = 0$

piano polare

$\Rightarrow \forall v \in \Pi_P \quad b(v_P, v) = 0$ cioè $v_P \in \mathrm{Rad}(b|_{\Pi_P}) \Rightarrow b|_{\Pi_P}$ è degenere

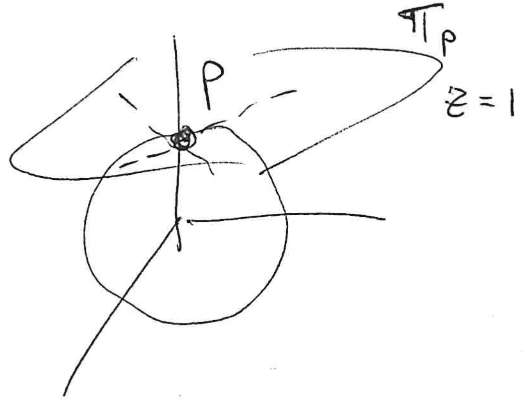
<u>QUINDI</u> <u>Def</u> Il piano polare di $P \in Q$ si chiama <u>piano tangente</u> alla quadrica in P.

Ex $\quad Q = \text{sfera} \quad x^2+y^2+z^2-1=0$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$P \equiv (0,0,1) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \rightarrow (1,0,0,1)$
$\quad x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3$



$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_3 - x_0 = 0$$

$$\underbrace{\frac{x_3}{x_0}}_{= z} - 1 = 0 \qquad z=1$$

$Q \cap \pi_P \qquad x_3 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2 = 0 \\ x_3 - x_0 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 - i x_2 = 0 \\ x_3 - x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \\ x_3 - x_0 = 0 \end{cases}$$

Quadriche in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$

$Q \cap$ piano all'infinito $=$ conica Γ

Se Γ è degenere? Q è tangente al piano all'infinito

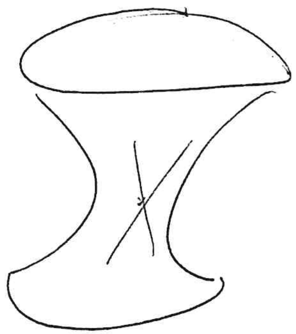
PARABOLOIDE

M_{44} ha rango < 3 $\det M_{44} = 0$

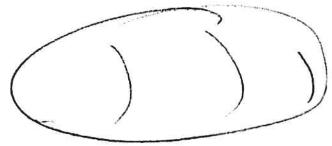
In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ $Q \cap$ piano all'infinito

- autoval. di M_{44} concordi, conica immaginaria: ELLISSOIDE
- conica degenere: PARABOLOIDE
- conica reale, autoval. di M_{44} discordi: IPERBOLOIDE

IPERBOLOIDE



ELLISSOIDE



Ex

$Q \quad X_0X_3 - X_1X_2 = 0$

Q_∞ piano all'infinito

$\begin{cases} X_1X_2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$

rette reali

(IPERBOLOIDE)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

rango 4 (non degenere)

segnatura $(2,0,2)$

iperboloide reale

dividendo per x_0^2

$\frac{X_3}{X_0} - \frac{X_1}{X_0}\frac{X_2}{X_0} = 0$

$z - xy = 0$

$z = xy$

grafico della moltiplicazione $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

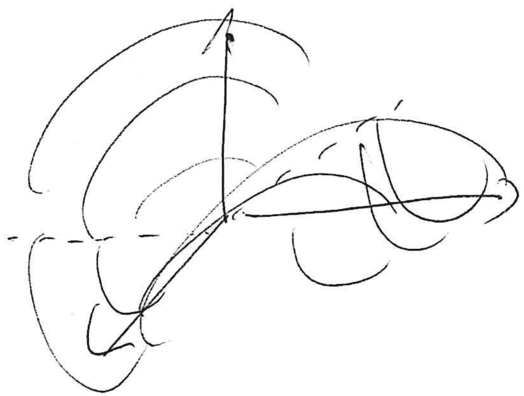
(PIANO MOLTIPLICATIVO)

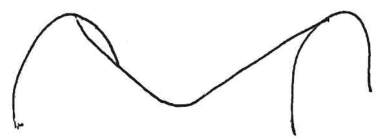
$\begin{cases} x = k \\ z - ky = 0 \end{cases}$ rette

$\begin{cases} y = k \\ z = kx \end{cases}$

$\begin{cases} x = y \\ z = x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -y \\ z = -x^2 \end{cases}$





SELLA

nelle coord. proiettive sono in $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{C}^4$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & & \mathbb{C}^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} & & \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Oppure posso usare $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ o anche $M_{\mathbb{C}}(2,2)$

$\mathbb{P}(M_{\mathbb{C}}(2,2))$

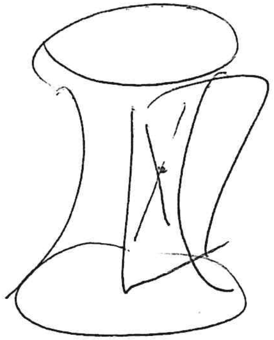
In $M_{\mathbb{C}}(2,2) \supseteq$ matrici simmetriche $Sym^2(\mathbb{C})$

$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ $Sym^2(\mathbb{C}) \iff x_1 = x_2$ $x_1 - x_2 = 0$ piano simmetrico

$\supseteq$ matrici antisimmetriche $M^t = -M$ $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ un punto (punto antisimm.) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\supseteq$ matrici diagonali ($\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ retta)

matrici non invertibile $\det = 0$ $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ iperboloide (piano moltiplicativo)



Prop Se $Q \cap \Pi$ (piano) è doppiamente degenere $\Rightarrow Q$ è degenere

dim $\mathbb{C}^4$ b polarità di Q. Per ipotesi $\exists W$ sottospazio di dim 3 t.c. $b_{|W}$ ha rango 1 quindi $\mathrm{Rad}\, b_{|W}$ ha dim $= 2$

(v_1, v_2) base di $\mathrm{Rad}\, b_{|W}$ $\subseteq W$ scelgo v_3 t.c. (v_1, v_2, v_3) base di W

prendo v_4 (v_1, v_2, v_3, v_4) base di $\mathbb{C}^4$ $v_i \neq 0$

- **oss** se $b(v_1, v_4) = 0 \Rightarrow b(v_1, v_1) = 0,\ b(v_1, v_2) = 0,\ b(v_1, v_3) = 0 \Rightarrow v_1 \in \mathrm{Rad}(b)$ $\Rightarrow b$ è degenere
- se $b(v_1, v_4) \neq 0$ $\alpha = \dfrac{b(v_2, v_4)}{b(v_1, v_4)}$ $b(\alpha v_1 - v_2, v_4) = \alpha\, b(v_1, v_4) - b(v_2, v_4) =$

$= \dfrac{b(v_2, v_4)}{\cancel{b(v_1, v_4)}}\, b\,\cancel{(v_1, v_4)} - b(v_2, v_4) = 0$

$\alpha v_1 - v_2 \in \mathrm{Rad}\, b_{|W}$ $\alpha v_1 - v_2 \neq 0$ (v_1, v_2 lin. indip.)

$0 = b(\alpha v_1 - v_2, v_1) = b(\alpha v_1 - v_2, v_2) = b(\alpha v_1 - v_2, v_3) \longrightarrow \alpha v_1 - v_2 \in \mathrm{Rad}(b)$ $\Rightarrow b$ è degenere