

GRAM-SCHMIDT

(37)

Ex $\mathbb{R}^3$ $B = \text{base canonica} = (e_1, e_2, e_3)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = e_1 \quad b(e_1, e_1) = 1$$

$$w_2 = e_2 - \frac{b(e_2, w_1)}{b(w_1, w_1)} w_1 = e_2 - \frac{2}{1} e_1 = (-2, 1, 0)$$

$$b(w_2, w_2) = (-2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = (0 \ -3 \ -1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$w_3 = e_3 - \frac{b(e_3, w_1)}{b(w_1, w_1)} w_1 - \frac{b(e_3, w_2)}{b(w_2, w_2)} w_2 = e_3 - e_1 - \frac{1}{3} w_2$$

$$b(w_2, e_3) = (0, -3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$= e_3 - e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_1 = e_3 - \frac{1}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$b(e_3, e_3) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$b(w_2, w_3) = (-2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ -3 \ -1) \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$B^1 = (w_1, w_2, w_3) \\ (1, 0, 0) \quad (-2, 1, 0) \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$b(w_3, w_3) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1/3) \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/3$$

$$M_b^{B^1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Oss $B = (v_1, \dots, v_n)$ l.c. $v_1, \dots, v_i$ sono $\perp$
con $b(v_k, v_h) = 0 \quad \forall h, k \leq i$

GRAM-SCHMIDT $j=1, \dots, i$

$$w_j = v_j - \frac{b(w_1, v_j)}{b(w_1, w_1)} w_1 - \dots - \frac{b(w_{j-1}, v_j)}{b(w_{j-1}, w_{j-1})} w_{j-1} = v_j$$

$$v_j - \frac{b(v_1, v_j)}{b(v_1, v_1)} v_1 - \dots - \frac{b(v_{j-1}, v_j)}{b(v_{j-1}, v_{j-1})} v_{j-1}$$

Corol b def. $W \subseteq V$ $(v_1, \dots, v_k)$ base $\perp$ di W .
Posso estenderla ad una base $\perp$ di V

$v_1, \dots, v_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n$ estensione qualsiasi a base di V

applico GS $\Rightarrow v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ base $\perp$ di V .

In questo caso $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ sono $\perp$ a W ed essendo $n-k$
 $\Rightarrow (v_{k+1}, \dots, v_n)$ formano una base di $W^\perp$ $\dim W^\perp$

$$w_i = v_i - \frac{b(w_1, v_i)}{b(w_1, w_1)} w_1 - \dots - \frac{b(w_{i-1}, v_i)}{b(w_{i-1}, w_{i-1})} w_{i-1}$$

↑
problema

ricorsivo

Prop $B = (v_1, \dots, v_n)$ base strett. ortog.

b def. positiva $\Leftrightarrow \forall i \quad b(v_i, v_i) > 0$

dim $\Rightarrow$ ovvio.

$$\Leftarrow u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad b(u, u) = \sum a_i a_j b(v_i, v_j)$$

$$(base \perp) \quad = \sum_{\substack{v_i \\ 0}} a_i^2 b(v_i, v_i) = 0 \Leftrightarrow \text{tutti gli } a_i \text{ sono } 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Oss M_B^B è diagonale $\Leftrightarrow B =$ base ortogonale

$$m_{ii} = b(v_i, v_i)$$

b bilin.

$$\mathcal{B} = (v_1 \dots v_n) \text{ base} \Rightarrow M_b^{\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B}' = (w_1 \dots w_n) \quad " \quad \Rightarrow M_b^{\mathcal{B}'}$$

(40)

matrici del cambio di base

$$M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$M_{id}^{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$\forall v$$

$$v_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}}$$

$$b(v, w) = v_{\mathcal{B}}^t M_b^{\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}}$$

$$b(v, w) = v_{\mathcal{B}'}^t M_b^{\mathcal{B}'} w_{\mathcal{B}'} = v_{\mathcal{B}'}^t \underbrace{(M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^t M_b^{\mathcal{B}'} M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}_{n \times n} w_{\mathcal{B}}$$

$$w_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'} w_{\mathcal{B}}$$

$$(v_{\mathcal{B}'}^t)^t (M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}})^t = v_{\mathcal{B}}^t (M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^t$$

Prop

$$M_b^{\mathcal{B}} = (M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^t M_b^{\mathcal{B}'} M^{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Esempio precedente

$$e_1 = w_1$$

41

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$z=0 \quad y=1 \quad x=2$$

$$2w_1 + w_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$z=1 \quad y=1/3 \quad x=2y+1/3z=1 \quad w_1 + 1/3 w_2 + w_3$$

$$(1, 0, 0) + (-2/3, 1/3, 0) + (-1/3, -1/3, 1) = (0, 0, 1)$$

$$M^{BB^1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (M^{BB^1})^t M_b^{B^1} M^{BB^1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Def Diciamo che M, M' sono CONGRUENTI se
 $\exists$ matrice invertibile A t.c.

$$M = A^t M' A$$

NB $M_b^{\mathcal{B}}$ $M_b^{\mathcal{B}'}$ sono congruenti —

Def Diciamo che M, M' sono SIMILI se
 $\exists$ matrice invertibile A t.c.

$$M = A^{-1} M' A$$

NB Se b è def. $\Rightarrow M_b^{\mathcal{B}}$ è congruente ad una
matrice diagonale.

La congruenza è una relazione di equiv.

(43)

• refl.

$$M = I^t M I$$

• symm

$$M = A^t M' A \Rightarrow M' = (A^t)^{-1} M A^{-1} = \underbrace{(A^{-1})^t}_{} M \underbrace{A^{-1}}_{} =$$

• trans.

$$M = A^t M' A \text{ e } M' = B^t M'' B$$

$$M = A^t (B^t M'' B) A = A^t B^t M'' \underbrace{BA}_{\substack{\downarrow \\ \text{inv.}}} = (BA)^t M'' (BA)$$

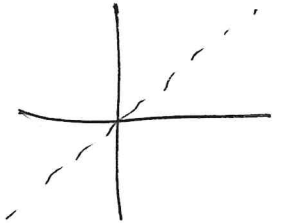
Congruenza
simile.

$$M = A^t M' A$$

$$M = A^{-1} M' A$$

se $A^{-1} = A^t$ le due cose coincidono

Def A è ORTOGONALE se $A^{-1} = A^t$ e A è invertibile

Es $I, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$  $A^{-1} = A = A^t$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\parallel$
 $B^t B$

$$B^{-1} = B^t$$

Prop A ortog.
" $\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

$$AA^t = I = A^t A$$

$$(AA^t)_{ij} = R_i \cdot R_j^t = \delta_{ij}$$

quindi le righe di A sono una
base I di $\cdot$

A è ortogonale $\Leftrightarrow$ le righe formano una base ortog. di $\mathbb{R}^n$ e $b(R_i, R_i) = 1 \quad \forall i$

(45)

Def $v_1, \dots, v_n$ sono ORTONORMALI risp. a b .
 $\Leftrightarrow$ sono $\perp$ e $\forall i \quad b(v_i, v_i) = 1$.

A è ortog. $\Leftrightarrow$ le righe formano una base ortonorm. di $\mathbb{R}^n$ risp. a $\cdot$

Oss Se A, B sono matrici quadrate t.c. $AB = I$ allora $BA = I$

Infatti A, B sono invertibili perché $1 = \det(AB) = \det(A) \det(B)$

inoltre $BA = BA I = BA(BB^{-1}) = B(AB)B^{-1} = B I B^{-1} = BB^{-1} = I$

Oss Le righe di A formano una base ortonorm. di $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow R_i \cdot R_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow AA^t = I \Leftrightarrow A^t A = I \Leftrightarrow C_i \cdot C_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow$ le colonne sono base ortonorm. di $\mathbb{R}^n$

Prop Sia b una forma bilin. simm. def. positiva

Allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ ortonormale per b .

dim Sia $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ base ortogonale. $\forall i \quad b(v_i, v_i) > 0$

$$\forall i \quad w_i = \frac{1}{\sqrt{b(v_i, v_i)}} v_i \Rightarrow b(w_i, w_i) = 1$$

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ base perché $\frac{1}{\sqrt{b(v_i, v_i)}} \neq 0$.

b forma bilin. def. positiva

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ base ortonorm.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{e viceversa}$$

In particolare ogni matrice di una forma bilin. simm. def. positiva è congruente a I .

$$b(v, w) = (v_{\mathcal{B}})^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}} = (v_{\mathcal{B}})^t I w_{\mathcal{B}} = (v_{\mathcal{B}})^t w_{\mathcal{B}} = (v_{\mathcal{B}}) \cdot (w_{\mathcal{B}})$$

Viceversa data una base $B = (w_1, \dots, w_n)$ $\exists$ forma bil. summ. b t.c. B è base ortonorm. di b .

Basta prendere b t.c. $M_B^B = I$
cioè pergo $b(v, w) = (v)_B \cdot (w)_B$

$\left(\begin{array}{c} NB \\ b \\ \text{è def. pos.} \end{array} \right)$

Sia b una forma bilin. def. positiva

$$\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$$

Def Uno SPAZIO EUCLIDEO è una coppia (V, b)
 V sp. vettoriale e b forma bilin. summ. def. pos. su V .

In uno spazio euclideo (V, b) $\forall v \in V$ si chiama

lunghezza di v il numero $\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$

Prop

$$\bullet \|v\|_b \geq 0 \quad e \quad \|v\|_b \leq 0 \Leftrightarrow v=0$$

(97)

$$\bullet \|\alpha v\|_b = |\alpha| \|v\|_b$$

$$\bullet \|v+w\|_b \leq \|v\|_b + \|w\|_b \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

dim.

$$\sqrt{b(v+w, v+w)} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{b(v, v)} + \sqrt{b(w, w)} \quad \Leftrightarrow$$

$$b(v+w, v+w) \stackrel{?}{\leq} (\sqrt{b(v, v)} + \sqrt{b(w, w)})^2 = \cancel{b(v, v)} + 2\sqrt{b(v, v)}\sqrt{b(w, w)} + \cancel{b(w, w)}$$

$$\cancel{b(v, v)} + 2b(v, w) + \cancel{b(w, w)}$$

$$\Leftrightarrow b(v, w) \leq \sqrt{b(v, v)} \sqrt{b(w, w)}$$

$$\text{se } b(v, w) < 0 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\text{se } b(v, w) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b(v, w)^2 \leq b(v, v) b(w, w) \quad \triangleleft$$

$$0 \leq b(\alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w) = \alpha^2 b(v, v) + 2\alpha\beta b(v, w) + \beta^2 b(w, w) \quad \forall \alpha, \beta$$

$$\text{in particolare } \alpha = b(w, w) \quad \beta = -b(v, w)$$

$$0 \leq b(w, w)^2 b(v, v) - 2b(w, w)b(v, w)b(v, w) + b(v, w)^2 b(w, w) =$$
$$= b(w, w)^2 b(v, v) - b(v, w)^2 b(w, w) \quad \text{se } w=0 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\text{se } w \neq 0 \quad b(w, w) > 0 \quad 0 \leq b(w, w)b(v, v) - b(v, w)^2 \quad b(v, w)^2 \leq b(v, v)b(w, w) \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

In uno spazio euclideo $\forall v, w$

distanza fra v e w

$$d_b(v, w) = \|v - w\|_b$$

- $d_b(v, w) \geq 0$ e $d_b(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$
- $d_b(w, v) = \|w - v\|_b = \|(-1)(v - w)\|_b = |-1| \cdot \|v - w\|_b = d_b(v, w)$
- $d_b(v, u) \leq d_b(v, w) + d_b(w, u) \quad \forall v, w, u \in V$

Def

Dati due spazi euclidei (V, b) e (V', b')
 chiameremo ISOMETRIA una funzione $f: V \rightarrow V'$
 che è LINEARE t.e. $\forall v, w \in V$

$$b'(f(v), f(w)) = b(v, w)$$

Prop Se f è un'isometria allora $\forall v$

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_B &= \|v\|_b \\ \sqrt{b'(f(v), f(v))} &= \sqrt{b(v, v)} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} v \perp_b w &\Leftrightarrow f(v) \perp_B f(w) \\ \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Updownarrow \\ b(v, w) = 0 &\Leftrightarrow b(f(v), f(w)) = 0 \end{aligned}$$

Prop Ogni isometria è iniettiva

dim $v \neq 0 \quad v \in V \quad \|v\|_b \neq 0 \Rightarrow \|f(v)\|_B \neq 0 \Rightarrow f(v) \neq 0.$

Es $(\mathbb{R}^2, \circ) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^3, \circ) \quad f(x, y) = (x, y, 0)$

$v, w \in \mathbb{R}^2 \quad v = (x, y) \quad w = (x', y')$

$f(v) \circ f(w) = (x, y, 0) \circ (x', y', 0) = x x' + y y' = (x, y) \circ (x', y') = v \circ w$

Ex

$(\mathbb{R}^2, \cdot)$

$(\mathbb{R}^2, \cdot)$

50

f

resp. a
base canonica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = (x, y) \\ W = (x', y')$$

isomethia

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$f(v) \cdot f(w) = (y, x) \cdot (y', x') = yy' + xx'$$

$$v \cdot w = (x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$$

f

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \cdot e_2 = 0$$

$$\|e_1\| = 1 \quad \|f(e_1)\| = \sqrt{5}$$

non è isomethia

$$f(e_1) = (1, 2)$$

$$f(e_2) = (2, 1)$$

$$(1, 2) \cdot (2, 1) = 4 \neq 0$$