

Correzione prova intermedia

$$M = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

a)

$$k \neq 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline k & 0 & k & 0 \end{array} \right) \quad y=0 \quad z=-x$$

$$\text{Rad}(b) = \{(x, y, z) : \begin{matrix} y=0 \\ z=-x \end{matrix}\}$$

$$= L(1, 0, -1) \quad \text{base } \{(1, 0, -1)\}$$

$$k=0 \quad \text{Rad}(b) = \{(x, y, z) : y=0\} \\ = L((1,0,0), (0,0,1)) \quad \text{base}((1,0,0), (0,0,1))$$

b) Se $k < 0$ $m_{11} < 0 \Rightarrow b$ non è semi-def
positiva

Per $k \geq 0$ 1 è autoval. (di autovett. $(0, 1, 0)$)

$\forall k$. $\text{Det}(M) = 0 \Rightarrow 0$ è autoval.

Traccia $(M) = 1 + 2k \neq 0 \Rightarrow$ 1 e $\frac{2k}{2k}$ 3° autoval. è

$\Rightarrow b$ semi-def positiva

c) In generale $\text{Rad}(b)^\perp = V$ e
 $V^\perp = \text{Rad}(b)$, quindi basta prendere
 $W = \text{Rad}(b)$

d) Dal punto b per $k=0$ gli autovalori
sono $1, 0, 0$ quindi la signature
è $(1, 2, 0)$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Dalla matrice $e_1 \perp_b e_2$
 $b(e_1, e_1) = -1$ $b(e_2, e_2) = 1$ $\left| \begin{array}{l} e_1 + e_2 \notin \text{Rad}(b) \\ \text{per a)} \end{array} \right.$
quindi $b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = b(e_1, e_1) + b(e_2, e_2) = 0$

$$f) \quad b(e_1, w) = b(v, w) \Leftrightarrow b(e_1 - v, w) = 0$$

quindi basta prendere $v \neq e_1$ t.c. $e_1 - v \in \text{Rad}(b)$

Per esempio $(1, 0, -1) \in \text{Rad}(b)$ quindi

$$v = e_1 - (1, 0, -1) = (0, 0, 1) \quad \text{va bene.}$$

g) I prodotti dei primi due elem. di B' li conosciamo direttamente da M . Gli altri prodotti si calcolano da M . Viene la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & 2k & 4k+1 \end{pmatrix}.$$