

Geometria 2020/21
Prova intermedia

Esercizio. -

Consideriamo la forma bilineare simmetrica b su \mathbb{R}^3 che, rispetto alla base canonica e_1, e_2, e_3 , ha matrice

$$\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

- a) Determinare PER OGNI k una base del radicale di b .
- b) Determinare i valori del parametro k per cui b è semidefinita positiva.
- c) Determinare un sottospazio proprio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $(W^\perp)^\perp = W$.
- d) Determinare la segnatura di b per $k = 0$.
- e) Posto $k = -1$, trovare $v \notin \text{Rad}(b)$ tale che $b(v, v) = 0$.
- f) Trovare $v \neq e_1$ tale che $b(v, w) = b(e_1, w)$ per ogni $w \in \mathbb{R}^3$.
- g) Trovare la matrice di b rispetto alla base B' data da $B' = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$.