

Sia V spazio vettoriale e F prodotto scalare su V
 Cui F = forma bilin. simm. definita positiva.

- Supponiamo $V = \mathbb{R}^n$ F = solo prodotto scalare
 risp. base canonica.

Diamo due basi B, B' sono ISOMETRICHE
 se definiscono lo stesso prodotto scalare.

Es $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sono sempre
 isometriche.



sono basi isometriche

nello spazio $V = \{ \text{vettori} \}$ geom. del
 piano $\}$.

Prop B, B' sono basi isometriche $\Leftrightarrow$

$M^{BB'}$ è ortogonale.

dim $V = \mathbb{R}^n$ B canonica M^{BB} ha per colonne gli elem. di B' risp. a B

quindi B' è isometrica risp. a B B' è base ortonormale $\Rightarrow M^{B'B}$ è ortogonale

$$M^{BB'} = (M^{B'B})^{-1} = (M^{B'B})^t \text{ è ortogonale}$$

Oss Per diagonalizzare una matrice M devo trovare una matrice A t.c.

$A^t M A$ è diagonale.

Se A è ortogonale $A^t M A = A^t M A$ diagonale & associata a M equivale a diagonalizzare M

DIAGONALIZZAZIONE ORTOGONALE

Def In uno spazio vettoriale V con prodotto scalare
fissato F

81

Diamo di un endomorfismo $f: V \rightarrow V$ e

una isometria (imp. a F) se $\forall v, w \in V$

$$F(f(v), f(w)) = F(v, w)$$

In particolare se $V = \mathbb{R}^n$ $F =$ prodotto scalare canonico,

f isometria $\Leftrightarrow \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ $v \cdot w = f(v) \cdot f(w)$

N.B. Se f è una isometria

$$\|f(v)\|_F = \sqrt{F(f(v), f(v))} = \sqrt{F(v, v)} = \|v\|_F$$

N.B. Ogni isometria è biettiva perché $\text{Ker}(f) = \{0\}$
perché se $v \in \text{Ker } f$

$$F(v, v) = F(f(v), f(v)) = F(0, 0) = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ perché } F \text{ è def. positiva.}$$

$$\underline{\text{Es}} \quad \mathbb{R}^2 \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v, w \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} v = (a, b) \\ w = (c, d) \end{matrix}$$

$$f(a, b) = (-a, b)$$

$$v \cdot w = ac + bd$$

$$f(v) \cdot f(w) = (-a, b) \cdot (-c, d) = ac + bd$$

f è isometria

Matrice di f risp. a base canonica $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(a, b) = (b, a)$$

$$g(v) \cdot g(w) = (b, a) \cdot (d, c) = bd + ac \quad g \text{ isometria}$$

Matrice di g risp. alla base canonica $\bar{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Oss Sia $f: V \rightarrow V$ isometria. B base ortonorm. risp. a F
 $\{v_1, \dots, v_n\}$

Allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base B' ortonormale.

$$F(f(v_i), f(v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

F prod. scalare canonico

- A matrice invertibile e C una matrice t.c.

$$AC = O. \quad \text{Allora } C = O.$$

$$O = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A) \cdot C = I \cdot C = C$$

- $AB = I$ ~~invertibile~~ allora $BA = I$

$$(\det A)(\det B) = \det(AB) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \text{ quindi } A \text{ invertibile.}$$

$$(AB)A = IA = A \quad A(BA) = AI = O$$

$$A(BA - I) = O \Rightarrow BA - I = O \quad \text{ovvero} \quad BA = I$$

se $M \bar{e}$ ortogonale

$$MM^t = I \Rightarrow R_1 \dots R_n \text{ righe di } M$$

$$R_i \cdot R_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M^t \bar{e} \text{ ortogonale}$$

Cond Se M è ortogonale allora $\det M = \pm 1$.

85

In effetti $M^b \cdot M = I$ quindi $\det(M^b) \cdot \det(M) = \det(I) = 1$
 $(\det M)^2$

Cond M è ortogonale $\Leftrightarrow M^b$ è ortogonale

$$\Leftrightarrow R_i R_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Oss $\mathbb{R}^{n,n} \ni \{M : \det M \neq 0\} = GL(n)$ è un gruppo.

$\{M \text{ ortogonali}\} \subseteq GL(n)$

sottogruppo

In fatti

AB ortogonale $\Rightarrow$

$$A^{-1} = A^t, B^{-1} = B^t$$

A ortogonale $\Rightarrow A^{-1} = A^t$ ortogonale

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = B^t A^t = (AB)^t$$

AB ortogonale

$\{M \text{ ortogonali}\} = O(n)$

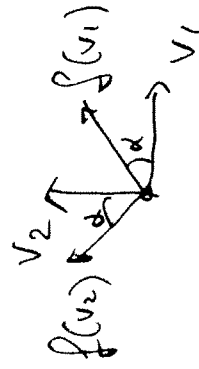
$\{M \text{ ortogonali con } \det = 1\} = SO(n)$ è sottogruppo

Prop f è un'isometria $\Leftrightarrow M_f^B$ è ortogonale $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

dim f è isometria $\Leftrightarrow B' = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base
 ortogonale

ma gli elementi di B' sono le colonne di M_f^B .

Ese Tutte le rotazioni (angolo α) danno isometrie
 quindi matrici ortogonali



$$B = \{v_1, v_2\} \text{ ortonormale } \Rightarrow \begin{aligned} v_1 \cdot v_1 &= 1 \\ v_2 \cdot v_2 &= 1 \\ v_1 \cdot v_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\|v_1\| = \|v_2\| = 1 \quad v_1 \perp v_2$$

$$f(v_1) = \cos \alpha \cdot v_1 + \sin \alpha \cdot v_2 \quad f(v_2) = -\sin \alpha \cdot v_1 + \cos \alpha \cdot v_2$$

$$M_f^B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ Isometrie di $\mathbb{R}^2$

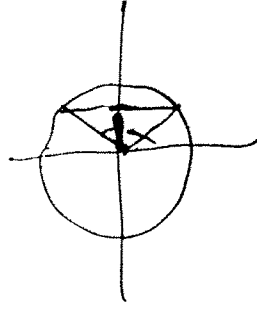
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ortogonale } M \in SO(2)$$

$$a^2 + c^2 = 1 \quad -1 \leq a \leq 1 \quad \text{prende } \alpha \text{ con } a = \cos \alpha$$

$$c^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow c^2 = \sin^2 \alpha \quad c = \pm \sin \alpha$$

e posso prendere α con $\sin \alpha = c$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & b \\ \sin \alpha & d \end{pmatrix}$$



$$b^2 + d^2 = 1 \quad d = \cos \beta$$

$$-1 \leq d \leq 1 \quad b = -\sin \beta$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$0 = -\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = \beta \end{array} \right.$$

$$1 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ROTAZIONE di α .

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -1 \quad \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = 1$$

$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ è rotazione

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{rotazione} \\ &= (\text{simmetria}) \circ (\text{rotazione}) \end{aligned}$$

Matrici simmetriche

89

Def Diamo che un endomorfismo $f \in$
SIMMETRICO risp. alla base B

$$\text{se } f(v) \cdot_B w = v \cdot_B f(w) \quad \forall v, w$$

Prop $f \in$ simm. risp. a $B = \{v_1, \dots, v_n\} \Leftrightarrow M_f^B \in$ simmetrica

$$\text{dov' } f(v_i) \cdot v_j$$

$$M_f^B = (a_{ij}) \quad f(v_i) = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n$$

$$f(v_i) \cdot v_j = (a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n) \cdot v_j =$$

$$(a_{i1}v_1 \cdot v_j + a_{i2}v_2 \cdot v_j + \dots + a_{in}v_n \cdot v_j) = a_{ji}$$

$$\text{se } f \text{ simmetrica} \quad a_{ji} = f(v_i) \cdot v_j = f(v_j) \cdot v_i = a_{ij} \quad \forall i, j$$

quindi M_f^B è simmetrica.

30

Viceversa se M_f^B è simm. $\Rightarrow f(v_i) \cdot v_j' = v_i \cdot f(v_j') \quad \forall i, j$

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \quad w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$\begin{aligned} f(v) \cdot w &= f(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \\ &= (b_1 f(v_1) + \dots + b_n f(v_n)) \cdot (c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)) \cdot (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) \\ &= \sum_i b_i c_j v_i' f(v_j) = \sum b_i c_j v_i' f(v_j) \end{aligned}$$