Gli autovalori sono le soluz. del polinomio caratteristico

$v \neq 0$ soddisfa $f(v) = av \iff v \in \mathrm{Ker}(f - \omega_a)$

Gli autovettori di $a \in \mathbb{R}$ autovalore sono gli elementi di $\mathrm{Ker}(f - \omega_a)$

(soluz. del sistema omog. associato a $M - aI$

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{polinomio caratt.} \quad \det\begin{pmatrix} 1-a & 2 & -1 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$= (1-a)\det\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} = (1-a)(a^2-a-1) + 2+1-a$$

$$= a^2 - \cancel{a} - 1 - a^3 + a^2 + \cancel{a} + 3 - a = -a^3 + 2a^2 - a + 2 = a^2(-a+2) + (-a+2)$$

$$= (a^2+1)(-a+2)$$

$(a^2+1)(-a+2)$

$a=2$ unico autovalore

autovettori di $a=2 \iff \mathrm{Ker}\,(M-2I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3+R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to 3R_2+R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x=y \\ y=z \end{array}$$

autovettori di $a=2$ $\quad \{(x,y,z) : x=y \text{ e } y=z\} =$

$= \{(y,y,y)\} = \mathcal{L}(1,1,1)$ TRANNE 0.

Prop $\forall$ autovalore a l'insieme

$\{v : v \text{ è autovettore di } a\} \cup \{0\}$ è

un sottospazio $(= \ker(f - a\,\mathrm{id}_V))$

Tale sottospazio è detto AUTOSPAZIO di $\mathcal{A}$.

dim (autospazio di a) = n° incognite libere di $(M - aI)$

$= n - \text{rango}(M - aI)$

NB Siccome a è autovalore $\det(M - aI) = 0$

quindi $M - aI$ NON ha rango n.

Pertanto dim(autospazio) ≥ 1.

<u>dim</u> Induzione su k

<u>$k=2$</u> ok

se vale per $k-1$

$$\dim(A_1 + \cdots + A_{k-1}) = \dim A_1 + \cdots + \dim A_{k-1}$$

verifichiamo che vale anche per k.

$$v \in (A_1 + \cdots + A_{k-1}) \cap A_k \overset{?}{\Longrightarrow} v = 0$$

$v \in A_k \qquad f(v) = a_k v = a_k(v_1 + \cdots + v_{k-1}) = a_k v_1 + \cdots + a_k v_{k-1}$

$v \in (A_1 + \cdots + A_{k-1}) = v_1 + \cdots + v_{k-1} \qquad v_i \in A_i \ \forall i$

$f(v) = f(v_1) + \cdots + f(v_{k-1}) = a_1 v_1 + \quad + a_{k-1} v_{k-1}$

$a_k v_1 + \cdots + a_k v_{k-1} = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} \qquad (a_k - a_1) v_1 + \cdots + \underset{\neq 0}{(a_k - a_{k-1})} v_{k-1} = 0$

$v_{k-1} = \dfrac{a_1 - a_k}{a_k - a_{k-1}} v_1 + \cdots + \dfrac{a_1 - a_{k-2}}{a_k - a_{k-1}} v_{k-2} \qquad v_{k-1} \in A_1 + \cdots + A_{k-2}$ assurdo

<u>Oss</u> $a_1 \neq a_2$ autovalori A_1, A_2 gli autospazi

$A_1 \cap A_2 = (0)$ (la somma è diretta)

Infatti $v \in A_1 \cap A_2$ $f(v) \begin{cases} a_1 v & \text{(perché } v \in A_1) \\ a_2 v & \text{" } A_2 \end{cases}$

$\Rightarrow a_1 v = a_2 v \Rightarrow \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$

<u>Prop</u> Se $a_1, \dots, a_k$ sono autovalori distinti e $A_1, \dots, A_k$ sono gli autospazi, la somma $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ è diretta.

Cioè $\forall i$ $(A_1 + \dots + A_{i-1}) \cap A_i = (0)$

<u>Quindi</u> $\dim(A_1 + \dots + A_k) = \dim A_1 + \dots + \dim A_k$

__Corol__ $\dim(A_1) + \dots + \dim A_k \leq n$

__Corol__ B_1 base A_1 B_2 base A_2 --- B_k base di A_k

$B_1 \cup \dots \cup B_k$ è lin. indip. ed è base di $A_1 + \dots + A_k$.

__dim__ $B_1 \cup \dots \cup B_k$ genera $A_1 + \dots + A_k$ e sono in numero "giusto". quindi sono indip. e base per LdS.

__Corol__ $\dim A_1 + \dots + \dim A_k = n \Rightarrow f$ è diag.

Perché $B_1 \cup \dots \cup B_k = \mathcal{B}$ è base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori

__N.B.__ La matrice di f risp. a $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} a_1 \ddots a_1 & & & & & 0 \\ & a_2 \ddots a_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & & a_k \ddots a_k \end{pmatrix}$$

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M - aI \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-a) \det \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} = (1-a)^2 \det \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = \underbrace{(1-a)^2}_{a=1} \underbrace{(a^2-1)}_{a=\pm 1}$$

autovalori $\quad a_1 = 1 \qquad a_2 = -1$

$\qquad\qquad\quad A_1 \qquad\quad A_2$

$$\dim A_1 = 4 - \text{rango}\,(M - I) = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\dim A_2 = 4 - \text{rango}\,(M + I) = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\overline{4} \Rightarrow \text{diag.}$$

base di A_1 $\quad -y+z=0$

$A_1 = \{(x,y,z,w) : -y+z=0 \text{ cioè } y=z\}$

$= \{(x,y,y,w)\}$ base $(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)$

base di A_2
$$\begin{cases} 2x = 0 & x=0 \\ y+z = 0 & y=-z \\ y+z = 0 & \\ 2w = 0 & w=0 \end{cases}$$
base $(0,-1,1,0)$

$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,1,0), \underset{v_3}{(0,0,0,1)}, (0,-1,1,0)\}$ base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f

$$M_f^{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Prop</u> Se $\dim A_1 + \dots + \dim A_k < n$ non è diag.

<u>dim</u> Per assurdo se $v_1 \dots v_n$ fosse una base di autovettori ciascun $v_i \in$ qualche autospazio

ma siccome i v_i sono indip. ce ne sono

al più $\dim A_1$ dentro A_1

" $\dim A_2$ " A_2

$\vdots$

al più $\dim A_k$ " A_k

$$\overline{}$$

$\hat{n}$ assurdo

Prop Se f è simm. e a_1, a_2 sono autoval. distinti v_1 autovett. di a_1 v_2 autovett. di a_2 allora $v_1 \perp v_2$.

dim $f(v_1) = a_1 v_1$ $\qquad$ $f(v_2) = a_2 v_2$

$$f(v_1) \cdot v_2 = f(v_2) \cdot v_1$$

$$= a_1 v_1 \cdot v_2 \qquad = a_2 v_2 \cdot v_1$$

$$= a_1 (v_1 \cdot v_2) = a_2 (v_1 \cdot v_2)$$

$$\Rightarrow a_1 (v_1 \cdot v_2) - a_2 (v_1 \cdot v_2) = 0 \Rightarrow \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\neq 0} (v_1 \cdot v_2) = 0$$

$$\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Oss Quindi $A_2 \subseteq A_1^{\perp}$

Algebra lineare su $\mathbb{C}$

"tutto torna allo stesso modo"

Algebra bilineare su $\mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ autovalori $\det\begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = a^2+1$

$$a = \pm i \in \mathbb{C}$$

<u>Prop</u> Ogni matrice (quindi ogni endomorf.) su $\mathbb{C}$ ha almeno un autovalore

$\dim A_1 = \dim$ autosp. di i $\quad \left(\underbrace{\begin{matrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{matrix}}_{\text{rango } 1} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \quad y = -ix$

$A_1 = \{(x, -ix) : x \in \mathbb{C}\} = L(1, -i)$ $\quad$ dim 1.

$\dim A_2 = \dim$ autosp. di $-i$ $\qquad \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right)$

$y = ix$

$A_2 = \{(x, ix) : x \in \mathbb{C}\} = L(1, i) \qquad \dim 1$

matrice <u>diagonalizzabile.</u>

<u>N.B.</u> $(1, i) \cdot (1, i) = 1 + i^2 = 0$ (vettori isotropi)

$(1, i) \perp (1, i)$

il prodotto scalare non è più definito.

$\|(1, i)\| = 0$

Coniugati

$V \in \mathbb{C}^n \quad V = (z_1, \dots, z_n) \qquad \overline{V} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n)$

$M = (z_{ij}) \qquad \overline{M} = (\overline{z}_{ij})$

Endomorf. $\mathbb{C}^n \xrightarrow{f} \mathbb{C}^n$ — endomorf. coniugato

$B =$ base canonica $\quad M_f^{BB} \qquad \overline{M}_f^{BB}$

$\forall\, e_i \in B \quad \overline{f}(e_i) = \overline{f(e_i)}$

Se v è autovett. di a per f

$\overline{v}$ " $\overline{a}$ " $\overline{f}$

$f(v) = av$, $f(v) = Mv$

$\overline{f}(\overline{v}) = \overline{M}\,\overline{v} = \overline{Mv} = \overline{av} = \overline{a}\,\overline{v}$

<u>Ex</u> $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diag.
neppure su $\mathbb{C}$

autovalori $\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ $\det = a^2 \Rightarrow a = 0$

<u>NB</u> In ogni matrice triangolare gli autovalori sono gli elem. della diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11}-a & a_{12} & \cdots & \\ 0 & a_{22}-a & & \\ 0 & 0 & & \\ & & & a_{nn}-a \end{pmatrix} =$$

$$(a_{11}-a) \det \begin{pmatrix} a_{22}-a & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}-a \end{pmatrix} = (a_{11}-a)(a_{22}-a) \det \begin{pmatrix} a_{33}-a & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}-a \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}-a) \cdots (a_{nn}-a)$$

A autosp. di 0 = Ker

dim Ker = $2 - 1 = 1 \Rightarrow$ non diag.

<u>Teorema</u> spettrale.

Ogni endomorfismo simmetrico è diag.

Endom. simm. $\quad f(v) \cdot w = v \cdot f(w)$

se B ortonorm. $\quad M_f^{BB}$ è simm.

- Dato $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simm. $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
  tutti gli autovalori sono reali

<u>dim</u> supponiamo per assurdo di avere autoval. $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$
sia $v \in \mathbb{C}^n$ autovettore.

$\overline{a}$ è anche lui autovalore con autovettore $\overline{v}$

Anche su $\mathbb{C}$ vale che se f è simm.
autovettori di autovalori diversi sono $\perp$.

Siccome $a \notin \mathbb{R}$ $\overline{a} \neq a$ $\Rightarrow$ $v \perp \overline{v}$ $\quad v \cdot \overline{v} = 0$

$v = (z_1 - z_n)$ $\quad \overline{v} = (\overline{z_1}, \dots \overline{z_n})$ $\Rightarrow$ $v \cdot \overline{v} = \|z_1\| + \dots + \|z_n\| = 0$

$\Rightarrow \|z_i\| = 0 \ \forall i \Rightarrow z_i = 0 \ \forall i \Rightarrow v = 0$ assurdo.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad M$

$f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\quad M$

$a \in \mathbb{R}$ autovalore di f (sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$)

mentre $\exists\, a' \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ autovalore

A_i autospazi di a_i $\quad$ $\dim A_i = n - \text{rango}(A - a_i I)$

se $a_i \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\dim A_i$ è la stessa su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$

$\sum \dim A_i \underset{n}{\leq}$ su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ se c'è autovalore $a' \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

$\sum \dim(\text{autospazi reali}) < n$

quindi f non è diag. su $\mathbb{R}$.

__Ex__ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} -a & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} = (1-a) \det \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = \underbrace{(1-a)}_{a=1}\underbrace{(a^2+1)}_{a=\pm i}$$

$a = i \Rightarrow$ su $\mathbb{R}$ __non__ diag.

è diag. su $\mathbb{C}$

__NB__ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $f \longleftarrow M \longrightarrow \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

a autovalore $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ $\qquad \bar{a}$ autoval. di $\overline{M} = M$

Def Dato un endom. $f: V \to V$

Diremo che un sottosp. $W \subseteq V$ è INVARIANTE se $f(W) \subseteq W$

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ endom. di $\mathbb{R}^2$ (risp. a base canonica)

$W = L(1,0)$ è invar? $f(1,0) = (1,2) \notin L(1,0)$ NO

$W = L(1,1)$ " $f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3,3) \in L(1,1)$

$\forall v \in L(1,1) \Rightarrow v = x(1,1)$ $f(v) = f(x(1,1)) = x f(1,1)$
$= x(3,3) \in L(1,1)$

SI

NB V è invariante
(0) "

<u>Ex</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rotazione di $90°$ intorno asse z.

1 è autovalore con autosp. $L(0,0,1) \Rightarrow$ invariante

$W = L((1,0,0)(0,1,0))$ è invariante

$f(1,0,0) = (0,1,0) \in W$

$f(0,1,0) = (-1,0,0) \in W$

<u>N.B.</u> Se $W \subseteq V$ invariante $f|_W : W \to W$ endomorf.

se $w \in W$ è autovettore di $f|_W$ risp. $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow w$ è anche autovettore di f (risp. $a \in \mathbb{R}$)

<u>NB</u> $W = \cancel{L}(v_1, \dots, v_k)$ è invariante sse $\forall i \; f(v_i) \in W$

perché $f(W)$ è generata da $f(v_1), \dots, f(v_k)$

<u>Ex</u> $\ker f$ è invariante perché $f(\ker f) = (0) \subseteq \ker f$

<u>Ex</u> Ogni autospazio è <u>invariante</u>

A autosp. di $a \in \mathbb{R}$ $\quad A = L(v_1 \dots v_k)$

$\forall i \; v_i$ è autovett. di f di autoval a.

$\forall i \; f(v_i) = a v_i \in A$

<u>Prop</u> La somma di sottosp. invarianti è invariante

<u>dim</u> $W_1 = L(v_1 \dots v_k)$ $\quad W_2 = L(w_1 \dots w_s)$ $\quad W_1 + W_2 = L(v_1 \dots v_k, w_1, \dots, w_s)$

$\forall i,j \; f(v_i) \in W_1 \subseteq W_1 + W_2 \qquad f(w_j) \in W_2 \subseteq W_1 + W_2$

$\Rightarrow W_1 + W_2$ è invariante

$f|_U : U \to U$ simmetrico

ha autovalore $a \in \mathbb{C}$ ma allora $a \in \mathbb{R}$

ma allora a è autoval. di f cioè

a è uno fra $a_1, \dots, a_k$. Mettiamo $a = a_1$

$\Rightarrow v$ autovettore di $a = a_1$

U

siccome $0 \neq v \in U$ $\quad v = c_{m+1} v_{m+1} + \dots + c_n v_n$

$\shortparallel$

$v \in A_1 \subseteq A_1 + \dots + A_k$ $\quad v = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$

$$b_1 v_1 + \dots + b_m v_m - c_{m+1} v_{m+1} - \dots - c_n v_n = 0$$

$v_1 \dots v_n$ base $\Rightarrow b_1 = \dots = b_m = c_{m+1} = \dots = c_n = 0 \Rightarrow v = 0$

assurdo.

<u>dim</u> (teorema spettrale)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrico

$a_1 \dots a_k$ autovalori $\in \mathbb{R}$

$A_1 \quad A_k$ autosp. $\qquad W = A_1 + \dots + A_k$ è invariante

$\dim W = \dim A_1 + \dots + \dim A_k$

Supponiamo $\dim W < n$ per assurdo

sia $v_1 \dots v_m$ base ortonorm. di W $\quad m = \dim W < n$

Posso completare con Gram-Schmidt tale base a una base ortonorm di $\mathbb{R}^n$ $\quad v_1 \dots v_m \, v_{m+1} \dots v_n \quad \overline{B}$

U = sottosp. $L(v_{m+1} \dots v_n)$

U è invariante. Infatti

$M_f^{\bar{B}\bar{B}}$ è simm.

$f(v_1) \in W$
$\parallel$
$b_1 v_1 + \dots + b_m v_m + 0 v_{m+1} + \dots + 0 v_n$

$f(v_2) \in W$
$\parallel$
$\dots + 0 v_{m+1} + \dots + 0 v_n$

$\vdots$

$f(v_m) \in W$
$\parallel$
$\dots + 0 v_{m+1} + \dots + 0 v_n$

$$M_f^{\bar{B}\bar{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ b_m & \cdots & \cdot & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right)_{n-m}$$

$n-m$

$f(v_{m+1}) =$
$0 v_1 + \dots + 0 v_m + c_{m+1} v_{m+1} \dots + c_n v_n$
$\in U$

$\vdots$

$f(v_n) =$
$0 v_1 + \dots 0 v_m + \cdot\, v_{m+1} + \dots + \cdot\, v_n$
$\in U$

quindi U è invariante