ℰg bis

Prop $v_1 \dots v_n$ sono lin. dip. $\iff$ Uno di loro è combin. lin. dei rimanenti

dim $\Leftarrow$ ipotesi uno dei vett. è combin. lin. degli altri

posso supporre che sia v_1

$v_1 = a_2v_2 + \dots + a_nv_n$

$$\underbrace{0 = -v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n}_{\text{comb. lin. che dà } 0}$$

non banale

lin. dip. $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ ipotesi $v_1 - v_n$ sono lin. dip. $\exists$ combin. lin. non banale

$0 = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$

$\Downarrow$

c'è almeno un $a_i \neq 0$

posso supporre $a_1 \neq 0$

$-a_1v_1 = a_2v_2 + \dots + a_nv_n$

$$v_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)v_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right)v_n$$

princ. di sostituzione

$\langle v_1 \dots v_n \rangle$ W e $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

con $a_i \neq 0$ allora sostituendo v_i con v

ottengo ancora gener. di W.

Lo stesso vale per $v_1 \dots v_n$ indip

$v_1 \dots v_n$ indip. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ con $a_i \neq 0$ $\Rightarrow$

sostituendo v_i con v ho ancora vettori indip.

dim Sia $W = \langle v_1 \dots v_n \rangle$ quindi $v_1 \dots v_n$ sono BASE di W

che pertanto ha dim n

Se sostituisco v_i con v ho ancora n generatori di W

(per il princ. sostit.) allora formano una base di W

e quindi sono indip.

determinanti 2x2 e proporzioni

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad ad - bc = 0$$

$$ad = bc$$

$b, d \neq 0$ $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \qquad a : b = c : d$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow$$ una serie di proporzionalità fra 9 numeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ matrice quadrata

$$\det A = \sum_{\substack{\text{permutazioni } \sigma \\ \text{di } \{1, \dots, n\}}} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

95 ter

<u>Segno di una permutazione</u> su $\{1, \dots n\}$ $\sigma = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$

<u>Def</u> $\forall i$ n_i = numero dei $\{\sigma_j \cancel{<} \sigma_i \quad j > i\}$ SEGNO = <u>PARITÀ</u> = parità di $\sum n_i$

<u>Esempi</u> $n=5$ $\sigma = \{3,1,5,2,4\}$ $n_1 = 2, n_2 = 0, n_3 = 2, n_4 = 0, n_5 = 0$ Σ = pari

$\sigma = \{1, \dots, n\}$ (pari) $n_i = 0 \ \forall i$

<u>Oss</u> Una trasposizione $\sigma_i \leftrightarrow \sigma_j$ cambia la parità $i<j$

$\sigma' = \{\sigma_1' \dots \sigma_n'\}$ con $\sigma_k' = \sigma_k$ se $k \neq i,j$ $\sigma_j' = \sigma_i$ $\sigma_i' = \sigma_j$

· supponiamo $\sigma_i < \sigma_j$ (l'altro caso per esercizio)

$n_k' = n_k$ se $k < i$ oppure $k > j$

$n_i' = n_i + \underset{\substack{\text{per } \sigma_i \\ \text{che va al posto } j}}{1} + A$ A = numero $\{\sigma_k \ i<k<j \ \sigma_k < \sigma_j\}$ $n_j' = n_j - B$

B = numero $\{\sigma_k \ i<k<j \ \sigma_k < \sigma_i\}$

se $i<k<j$ $n_k' = \begin{cases} n_k & \text{se } \sigma_k < \sigma_i \text{ o } \sigma_k > \sigma_j \\ n_k + 1 & \text{se } \sigma_i < \sigma_k < \sigma_j \end{cases}$ A−B = numero $\{\sigma_k : i<k<j \ \ \sigma_i < \sigma_k < \sigma_j\}$

Quindi $\sum n_i' = \sum n_i + (1+A) - B + (A-B) = 1 + \sum n_i + 2(A-B)$

per n_i' ...