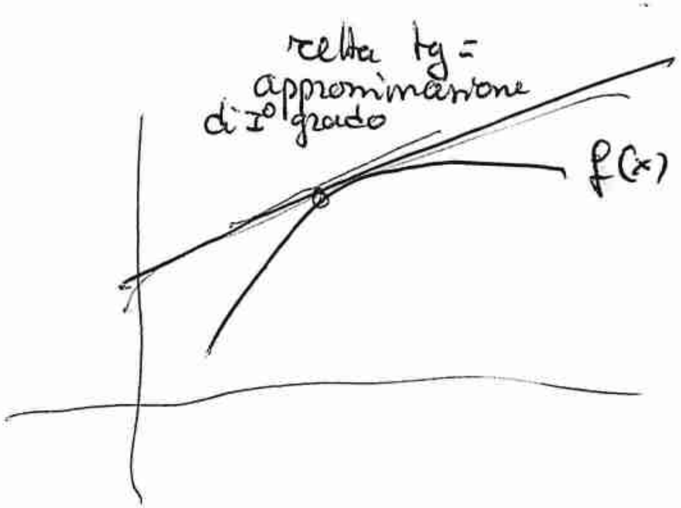
Algebra Lineare 17/18

Chiantini
luca.chiantini@unisi.it
DIISM
www.diism.unisi.it

Lineare = di primo grado



$y = mx + q$

- Spazi vettoriali
- Basi. Sistemi di coordinate
- Funzioni lineari
- Algebra delle matrici

DIPART. INGEGNERIA dell'INFORMAZIONE e SCIENZE MATEMATICHE

A. PASINI Elem. di Algebra e Geom.
Liguori Vol. III

$2x - 7y + 3z = 12$ $\quad$ x, y, z

coeff. $\quad$ termine noto $\quad$ incognite (variabili)

$2a - 7b + 3c = 12$ $\quad$ stessa eq.

$2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 12$ $\quad$ x_1, x_2, x_3 incognite

Coeff. = numeri

NUMERI

numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}$

$\cap$

numeri interi $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}$

$\cap$

numeri razionali $\left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} = \mathbb{Q}$

$\cap$

numeri reali — misurazione dei segmenti — $\mathbb{R} \not\ni \sqrt{-1}$, $\pi \in \mathbb{R}$

$\cap$ $\quad$ $\cap$ $\quad$ $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$

numeri complessi $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{C}$

algebricamente chiusi

$\boxed{\frac{1}{0} \text{ non c'è.}}$

$\cancel{\frac{1}{0} = \infty}$?

eq. di I° grado i cui coeff. $\in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ CAMPO NUMERICO

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{C}$

$\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ somma digitale

	0	1
0	0	1
1	1	0

sono esempi di campi numerici

$\mathbb{Z}$ non è un campo numerico
perchè non si può fare, in generale,
l'inverso risp. alla moltiplicazione.

i coeff. delle equazioni lineari sono quindi elementi di un prefissato campo numerico $\mathbb{K}$ (solitamente $\mathbb{R}$)

<u>proprietà</u> La somma è commutativa

$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad a+b = b+a$

La somma è distributiva resp. al prodotto

$\forall a, b, c \qquad a(b+c) = ab+ac$

$3x+2=0 \qquad 3x=-2 \qquad x=-2/3$

perché non si può dividere per 0?

$\frac{1}{0} \cdot 0 = 1$

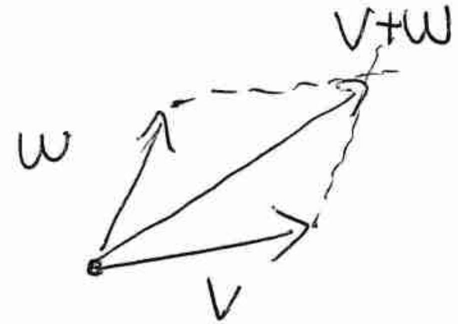
$1 = \frac{1}{0} \cdot 0 = \frac{1}{0}(0+0) \overset{\text{distributiva}}{=} \frac{1}{0} \cdot 0 + \frac{1}{0} \cdot 0 = 1+1 = 2$

Cosa sono le incognite?

$\text{Coeff} \in K$

$3x - 7y + 2z = \bigcirc$

Il termine noto è un oggetto della stessa natura delle incognite

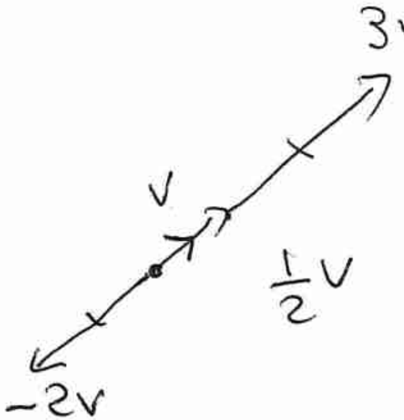


$V+W = W+V$

$p(t) = 1 + t - t^2$

$q(t) = 3 - 2t + t^2 + 2t^3$

$p(t) + q(t) = 4 - t + \quad + 2t^3$

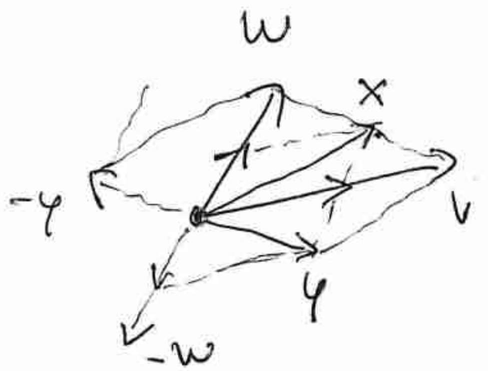


$3p(t) = 3 + 3t - 3t^2$

$3(2p(t) - q(t)) = 6p(t) - 3q(t)$

$X = \{$vettori della fisica$\}$ $\quad K = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times X \to X \qquad 1/2, v \rightsquigarrow \frac{1}{2}v$



Problema Trovare due vettori x, y tali che la loro somma sia v e la loro differenza sia w

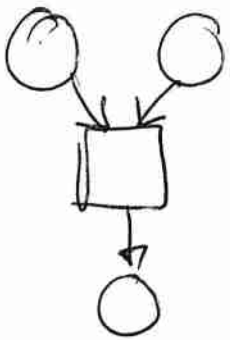
$$\begin{cases} x+y=v \\ x-y=w \end{cases} \qquad \begin{cases} y=v-x \\ x-(v-x)=w \end{cases} \qquad \begin{cases} y=v-x \\ x-v+x=w \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=v-x \\ 2x-v=w \end{cases} \qquad \begin{cases} y=v-x \\ 2x=w+v \end{cases} \qquad \begin{cases} y=v-x \\ x=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}v \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=v-\left(\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}v\right) \\ x=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}v \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}w \\ x=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}v \end{cases}$$

Def X insieme qualsiasi

Operazione su X è una funzione $\underbrace{X \times X}_{\text{coppie di elem. di } X} \to X$



$X = \mathbb{R}$,

{vettori della freccia}

{polinomi}

La somma è un'operazione su X

Operazione esterna su X una funzione $\underset{\text{campo numerico}}{K} \times X \to X$

Proprietà fondamentali X K

somma $X \times X \to X$ prodotto $K \times X \to X$

1) la somma è associativa	1) $\forall x,y,z \in X \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
2) " è commutativa	2) $\forall x,y \in X \quad x+y = y+x$
3) $\exists$ un elem. neutro della somma	3) $\exists\, 0 \in X$ t.c. $x+0 = 0+x = x \ \forall x \in X$
4) ogni elem. di X ha opposto risp. alla somma	4) $\forall x \in X \ \exists\, -x$ t.c. $x+(-x) = 0$
5) il prod. è distributivo risp. alla somma di X	5) $\forall a \in K$, $x,y \in X \quad a(x+y) = ax+ay$
6) il prod. è distributivo risp. alla somma di K	6) $\forall a,b \in K$, $x \in X \quad (a+b)x = ax+bx$
7) il prod. in X è associativo risp. al prodotto in K	7) $\forall a,b \in K$, $x \in X \quad a(bx) = (ab)x$
8) il numero 1 è elem. neutro del prod. in X	8) $\forall x \in X \quad 1x = x$

Def Un insieme V si chiama SPAZIO VETTORIALE se è dotato di una operazione $(+)$ e una operazione esterna (prodotto) che soddisfano le 8 proprietà

Ogni campo numerico è uno spazio vettoriale
L'insieme dei vettori della fisica è uno spazio vettoriale
L'insieme dei polinomi è uno spazio vettoriale

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{$ coppie ordinate di numeri reali $\} \ni (1,2)$, $\ni (2,1)$, $\ni (7, \sqrt{3})$

$(1,2) + (3,8) = (4,10) \qquad 3(1,2) = (3,6)$

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad u(a_1, b_1) = (u a_1, u b_1)$

esempio di verifica delle 8 proprietà

$\downarrow$

(6) $\forall a,b \in \underset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{K}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$ $\quad (a+b)x \overset{?}{=} ax+bx$

$\Downarrow$

$x = (x_1, x_2)$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$(a+b)(x_1,x_2) \overset{?}{=} a(x_1,x_2) + b(x_1,x_2)$$

$$(a+b)(x_1,x_2) = ((a+b)x_1, (a+b)x_2)$$

$$a(x_1,x_2)+b(x_1,x_2) = (ax_1, ax_2) + (bx_1, bx_2) = (ax_1+bx_1, ax_2+bx_2)$$

$$((a+b)x_1, (a+b)x_2) = (ax_1+bx_1, ax_2+bx_2)$$

sì, per proprietà dei numeri di $\mathbb{R}$

stesso motivo

due coppie sono uguali se hanno gli elem. corrispondenti uguali

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

(7) $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \forall \underset{(x_1,x_2)}{\overset{}{x}} \in \mathbb{R}^2$

$$a(bx) \overset{?}{=} (ab)x$$

$$a(bx) = a(b(x_1,x_2)) = a(bx_1, bx_2) = (a(bx_1), a(bx_2))$$

$$(ab)x = (ab)(x_1,x_2) = ((ab)x_1, (ab)x_2)$$

$$(a(bx_1), a(bx_2)) = ((ab)x_1, (ab)x_2)$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \exists\, -x \in \mathbb{R}^2 !$ t.c. $\quad x + (-x) = 0 \in \mathbb{R}^2$

$x = (x_1, x_2) \qquad -x = (-x_1, -x_2) \qquad 0 = (0,0)$

$$(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0,0)$$

ecc. per le altre proprietà

$\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale

$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ è spazio vettoriale

$(1,2,3) + (4,5,6) = (5,7,9)$

$\frac{1}{2}(1,2,3) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$

$\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ sono spazi vettoriali

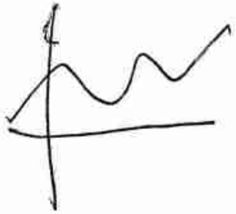
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$ è uno spazio vettoriale

n-uple

$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) \quad x_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$ successioni di numeri

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^0 = (0)$ spazio vettoriale nullo

$X = \{ \text{funzioni } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ 

13

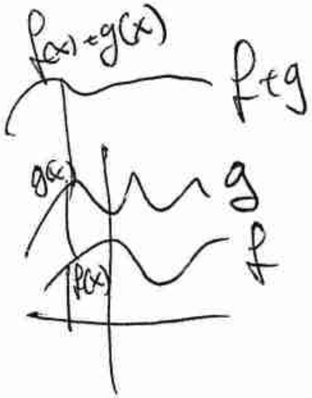
$\operatorname{sen} x + \cos x$

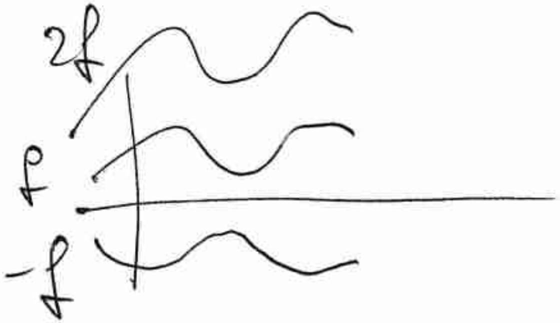
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(af)(x) = a(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$





X è uno sp. vettoriale

$f(x) = 0 \quad \forall x$

Spazi di matrici

$M_{n,m}(K)$

n → numero di righe

m → numero di colonne

2×2 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \boxed{7} & 9 \end{pmatrix}$ $\quad -3 \to A_{12}$ $\quad A_{21} \to 7$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} \in K$ è elemento nella riga i-esima e nella colonna j-esima

$A + B = C$ dove $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ $\quad \forall\ i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

$A, B \in M_{n,m}(K)$

$C \in$

$$\underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}} + \underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$aA = D$ dove $D_{ij} = a A_{ij} \quad \forall i,j$

Elemento neutro della somma

Matrice nulla $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$O_{ij} = 0 \quad \forall \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array}$$

Matrici

$M_{2,3}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \pi & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

n righe
m colonne

$\{$matrici $n \times m$ a coeff. $K\} = M_{n,m}(K)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$M_{n,m}(K)$ sono spazi vettoriali

Notazione X spazio vettoriale su K

ogni $x \in X$ è un VETTORE

i numeri di K sono SCALARI

$\nearrow$ vettore geometrico

Legge di cancellazione della somma $\forall$ Spazio vettoriale V su K (17)

$\forall\ x, y, z \in V$ se $\cancel{x} + y = \cancel{x} + z \Rightarrow y = z$

<u>dim</u> $x + y = x + z$

(4) $(-x) + x + y = (-x) + x + z$

(1) $[(-x) + x] + y = [(-x) + x] + z$

(4) $0 + y = 0 + z$

(3) $y = z$

$\boxed{\text{ok}}$

(2) $y + \cancel{x} = z + \cancel{x}$

$x - 2y = \bar{0}$

$x - \cancel{2y} + \cancel{2y} = 0 + 2y$

$x = 2y$

Legge di annullamento del prodotto

· Spazio vettoriale V su K

$\forall a \in K, x \in V$ se $ax = 0$ allora $a = 0$ oppure $x = 0$

Viceversa se $a = 0$ oppure $x = 0$ allora $ax = 0$

$$ax = 0 \iff a = 0 \ \boxed{\text{oppure}} \ x = 0$$

$\Leftarrow$

$\forall x \ a = 0 \quad 0x \overset{?}{=} 0 \qquad \cancel{0x} + 0 \overset{3}{=} 0x = (0+0)x \overset{6}{=} \cancel{0x} + 0x \Rightarrow 0 = 0x$

$\forall a \ x = 0 \quad a0 \overset{?}{=} 0 \qquad \cancel{a0} + 0 \overset{3}{=} a \cdot 0 = a(0+0) \overset{5}{=} \cancel{a0} + a0 \Rightarrow 0 = a0$

$\Rightarrow \quad ax = 0 \overset{?}{\Rightarrow} a = 0$ oppure $x = 0$

faccio vedere che se $a \neq 0$ allora $x = 0$.

$\exists \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \cdot a = 1$

$$x \overset{8}{=} 1x = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x \overset{7}{=} \frac{1}{a}(ax) \overset{ax=0}{=} \frac{1}{a} \cdot 0 = 0 \qquad \boxed{\text{ok}}$$

in K

$\forall\, a, b, c \in K$

$\cancel{a}b = \cancel{a}c \Rightarrow b = c$? $a \neq 0$ sì, $a = 0$ no

$a=0 \quad b=2 \quad c=3$

$\cancel{0}2 = \cancel{0}3$ ma $2 \neq 3$

$\underset{0}{\cancel{0}2} \overset{\text{no}}{=} \underset{0}{\cancel{0}3}$

ATTENZIONE! Non si può usare la cancellazione risp. al prodotto a meno che non siamo sicuri che l'elemento che cancelliamo non sia 0.

<u>Altre proprietà</u>

$\forall x \in V$

$(-1)x = -x$

$$x + (-1)x \overset{8}{=} 1x + (-1)x \overset{6}{=} (1+(-1))x = 0x \overset{\text{e.a.p.}}{=} 0$$

$x - y \qquad x + (-y) = x + (-1)y$

<u>Teorema</u>

Sia $V \neq (0)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora V ha ∞ elem.

<u>dim</u> Prendiamo $x \in V \quad x \neq 0$.

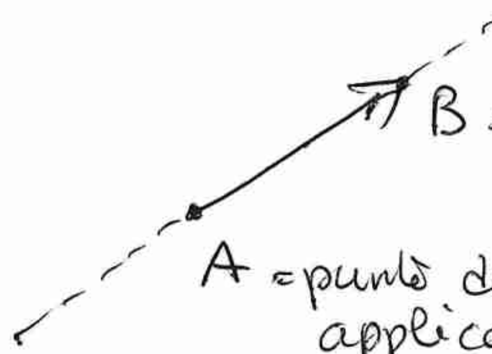
$\forall a \in \mathbb{R} \qquad ax \in V$

se $a \neq b \Rightarrow ax \neq bx$?

se fosse $ax = bx$ allora $ax - bx = 0$

quindi per la 6 $\quad \underline{(a-b)x = 0}$ NO $\quad$ e.a.p. $\Rightarrow$ $a - b = 0$ NO oppure $x = 0$ NO

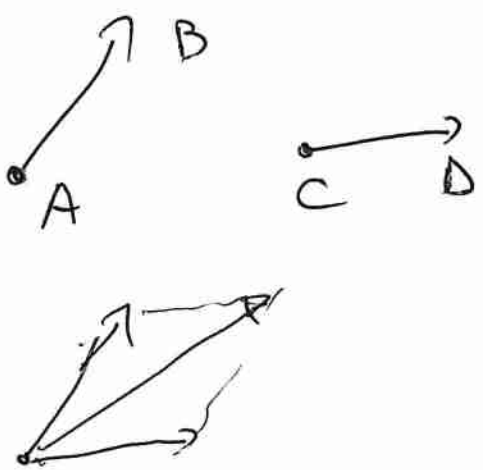
Vettori geometrici



direzione

B = estremo freccia

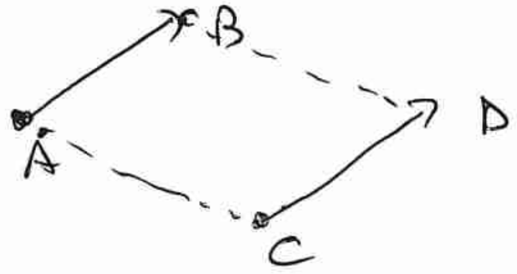
A = punto di applicazione



vettore geometrico = coppia ordinata di punti (A,B)

vettore nullo (A,A)

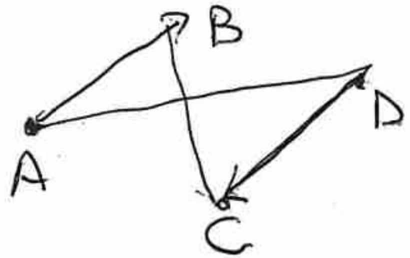
due coppie (A,B) (C,D) si dicono EQUIPOLLENTI se $\boxed{ACDB}$ è un parallelogramma



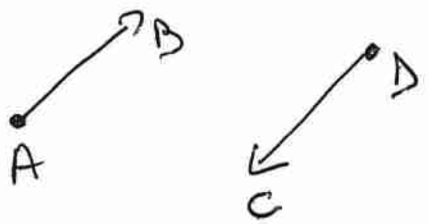
$AC =\!/\!/\ BD$

$AB =\!/\!/\ CD$

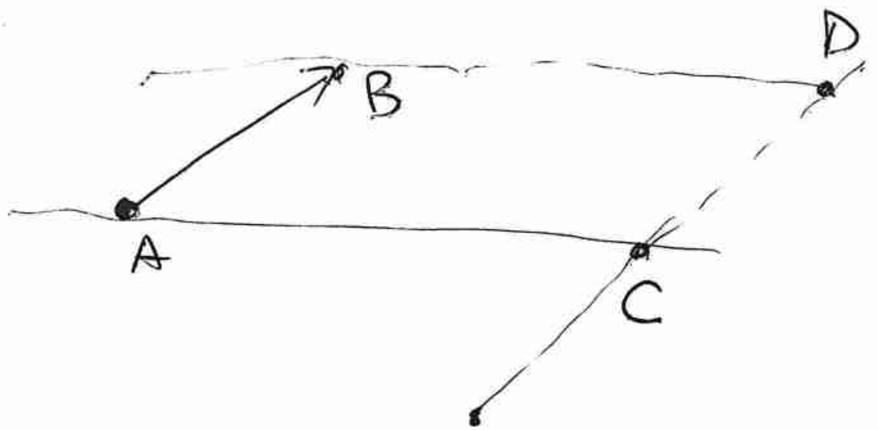
ACDB è un parall.



ADCB non è un parallelogramma



(A,B) non è equipollente a (D,C)

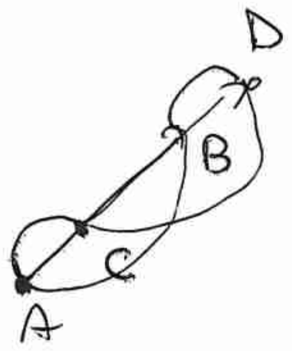


Dati A, B, C

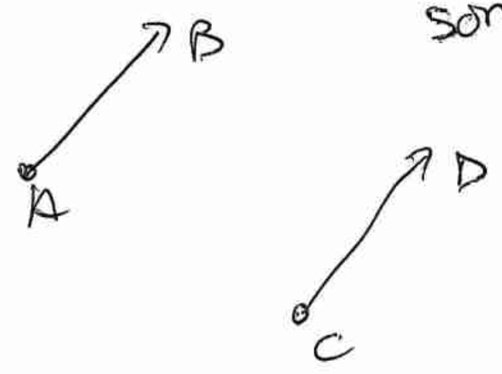
$\exists$ un <u>unico</u> punto D

t.c. $ACDB$ è

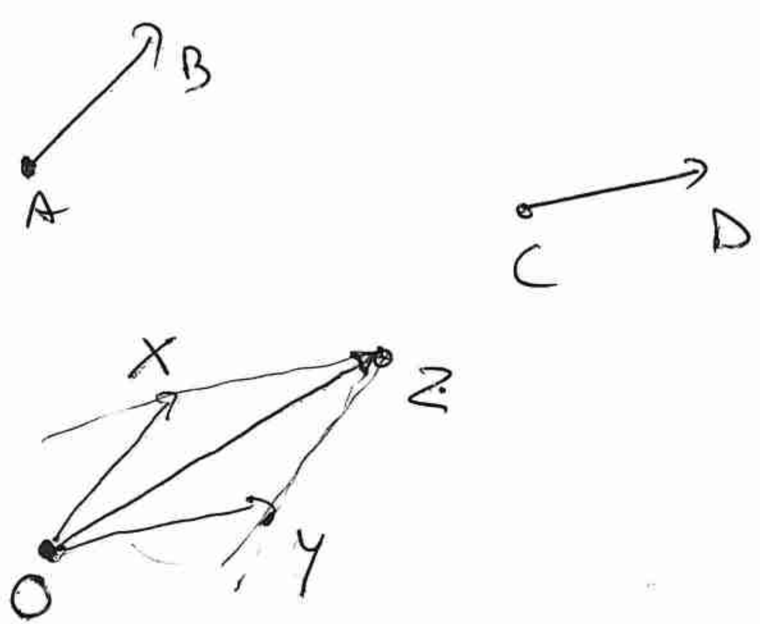
un parallelogramma



$ACDB$ parall. ?



sono <u>lo stesso</u> vettore geometrico



$(A,B)+(C,D) = ?$

fisso O

prendo X t.c.

OX equipoll. AB

prendo Y t.c.

OY equipoll. CD

la somma $(A,B)+(C,D) = (O,Z)$ dove

$OYZX$ è parallelogramma

OZ equipoll. a $O'Z'$

quindi la somma è ben definita e non dipende dalla scelta del punto O