

19/9/2018

Lezione 5

9-13

1

g nella dimostrazione del Teo 6.11.1
è individuato in modo unico a
meno di moltiplicazione per un $a \in K, a \neq 0$
Infatti Supponiamo che g_1 e g_2 ,

$$g_1, g_2 \in K[x]$$

$$\langle g_1 \rangle = I$$

$$\langle g_2 \rangle = I$$

$$g_1 = h g_2 \quad h \in K[x]$$

$$g_2 = k g_1 \quad k \in K[x]$$

$$\Rightarrow \deg(g_1) = \deg(h g_1) = \deg(h) + \deg(g_2)$$

$$\Rightarrow \deg(g_2) \leq \deg(g_1) \quad \text{Analogamente}$$

$$\deg(g_1) \leq \deg(g_2)$$

$$\Rightarrow \deg(g_1) = \deg(g_2)$$

$$\Rightarrow h = \text{costante} \in K \setminus \{0\}$$

Il "rappresentante integrato" tra tutti questi g è quello monico.

Torniamo ora alla Def. 4.13.1

Se $f_1 \in K[x]$, $f_2 = 0$, $f_1 \neq 0$

$$\text{mcd}(f_1, 0) = \frac{f_1}{\text{lc}(f_1)}$$

Teorema 5.2.1 Siano $f_1, f_2 \in K[x]$ non entrambi nulli. Allora esiste $\text{mcd}(f_1, f_2)$ e inoltre:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle \text{mcd}(f_1, f_2) \rangle$$

Oss 5.2.1 Riguardo al g del Teo 4.11.1 questo è il "miglior" generatore di $I = \langle f_1, f_2 \rangle$.
Ad esempio, supponiamo di volere risolvere

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di (5.2.1) sono le stesse

delle soluzioni di una fda equazione

$$g=0$$

Esempio 5.8.1 $f_1(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$

$$f_2(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$f_1(x) = 2(x-2)(x-1)^2$$

$$f_2(x) = (x-2)^2(x-1)$$

$$\text{mcd}(f_1, f_2) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

Dim (del tes. 5.2.1). Sappiamo dal tes 4.11.1 che ogni ideale di $K[x]$ è generato da un fda elemento. In particolare, essendo

$\langle f_1, f_2 \rangle$... un ideale di $K[x]$,

esiste $g \in K[x]$ che genera

$$\langle f_1, f_2 \rangle. \quad \text{Cioè } \langle f_1, f_2 \rangle = \langle g \rangle$$

Siccome $\langle g \rangle$ non cambia se moltiplico $\underline{6}$
 g per un elemento di K diverso da 0,
posso supporre g monico ($lc(g)=1$)

Dico che $g = \gcd(f_1, f_2)$

In fatti g verifica la 3) della Def 4.13.1,
e inoltre:
 $f_1 \in \langle g \rangle \Rightarrow f_1 = hg$
 $f_2 \in \langle g \rangle \Rightarrow f_2 = kg$

con $h, k \in K[x]$. Dunque g divide f_1
e g divide f_2 . Resta da dim. la

2) della Def 4.13.1. Sia $h \in K[x]$

con h che divide f_1 e h divide f_2 .

Dato che $g \in \langle f_1, f_2 \rangle$, si ha che

$\exists u_1, u_2 \in K[x]$ tali che

$$g = u_1 f_1 + u_2 f_2$$

Dato che h divide f_1 e f_2 , divide anche $u_1 f_1 + u_2 f_2$.

Dunque h divide g . $\square$

Il $\text{mcd}(f_1, f_2)$ altro non è che il
"vecchio" g della dimostrazione del
teo 4.11.1, purché $\deg(g) = 1$, quando
 $I = \langle f_1, f_2 \rangle$.

ALGORITMO EUCLIDEO (per trovare
 $\text{mcd}(f_1, f_2)$)

INPUT $f_1, f_2 \in K[x]$ non entrambi nulli

OUTPUT $p = \text{mcd}(f_1, f_2)$

INIZIALIZZAZIONE $f := f_1, g := f_2$

WHILE $g \neq 0$

$f \xrightarrow{g} r$ con r resto della
divisione di f per g

$f := g$

$g := r$

$p := \frac{1}{\deg(f)} f$

NON Dimostrare il teo che questo algoritmo funziona

Esercizio 5.7.1 $f_1(x) = x^3 - 3x + 2$

$$f_2(x) = x^2 - 1$$

$$f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad g(x) = x^2 - 1$$

$$x^3 - 3x + 2 \xrightarrow{x^2 - 1} -2x + 2 \quad \text{resto}$$

$$\deg(r) = 1 < \deg(g) = 2$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = -2x + 2$$

$$g \neq 0$$

$$x^2 - 1 \xrightarrow{-2x + 2} x - 1$$

$$f(x) = -2x + 2$$

$$g(x) = x - 1$$

$$f(x) = x - 1$$

$$g = 0$$

$$x - 1 \xrightarrow{x - 1} 0 \quad \text{BT}$$

OUTPUT

$$\gcd(f, f) = x - 1$$

Def. 5.9.1. $f \in K[x]$ si dice irriducibile

su K se data una fattorizzazione
di f , $f = pq$ con $p, q \in K[x]$
allora necessariamente $\deg(p) = \deg(q)$
è zero (cioè o p o q è $\in K$)

Teo 5.9.1 Ogni polinomio in $K[x]$
si scrive come prodotto (finito)
di polinomi irriducibili.

Dim. Si fa per induzione sul grado
del polinomio.

Oss 5.9.1 L'irriducibilità dipende
da K . Cioè ad esempio

$$f(x) = x^2 + 1$$

$f \in \mathbb{R}[x]$ f è irriducibile (su $\mathbb{R}$)

$f \in \mathbb{C}[x]$ f è riducibile ^(su $\mathbb{C}$), $f(x) = (x-i)(x+i)$

..... $(i^2 = -1)$

Esercizio nella composizione di funzioni

10

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x|$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(y) = \sin(y^3 + y + 1)$$

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$f \circ g$$

$$g \circ f$$

$$f \circ g \circ h$$

$$g \circ f \circ h$$

$$f \circ f$$

$$g \circ g$$

$$g \circ h$$

$$g \circ h \circ h$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\sin(x^3 + x + 1)) \\ &= |\sin(x^3 + x + 1)| \end{aligned}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(|x|) = \sin(|x|^3 + |x| + 1)$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(|x|) = ||x|| = |x|$$

$$|?| = \begin{cases} ? & \text{se } ? \geq 0 \\ -? & \text{se } ? < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x| &= \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &= |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\sec(x^3 + x + 1))$$

$$= \sec\left(\sec(x^3 + x + 1)^3 + \sec(x^3 + x + 1) + 1\right)$$

$$f \circ g \circ h(x) = f \circ g(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$= f\left(g\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = f\left(\sec\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1}{1+x^2} + 1\right)\right)$$

$$= \left| \sec\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1}{1+x^2} + 1\right) \right|$$

$$g \circ f \circ h(x) = g(f(h(x))) = g\left(f\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)$$

$$= g\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sec\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1}{1+x^2} + 1\right)$$

$$g \circ h(x) = g\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sec\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1}{1+x^2} + 1\right)$$

$$g \circ h \circ h(x) = g\left(h\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = g\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\right)$$

$$= \sec\left(\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\right)^3 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} + 1\right)$$

ES

5.12.1

12

$$f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \text{dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Quando è definita $g \circ f$?

Quando è definita $f \circ g$?

Consideriamo $g \circ f$. La condizione è
 $\text{im}(f) \subseteq \text{dom}(g)$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

ES 5.12.2 $(4x+2)^+$ è la composizione di
 quali funzioni?

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 4x+2$$

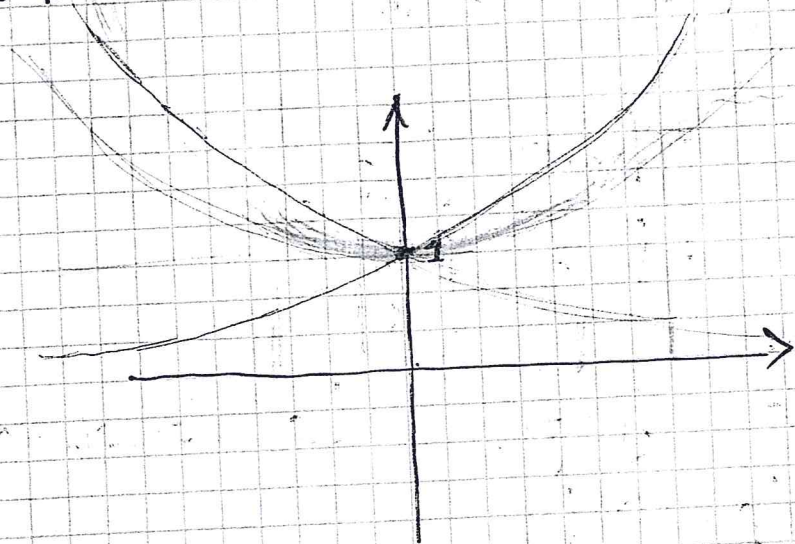
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \rightarrow y^+$$

$$g(f(x)) = (4x+2)^+$$

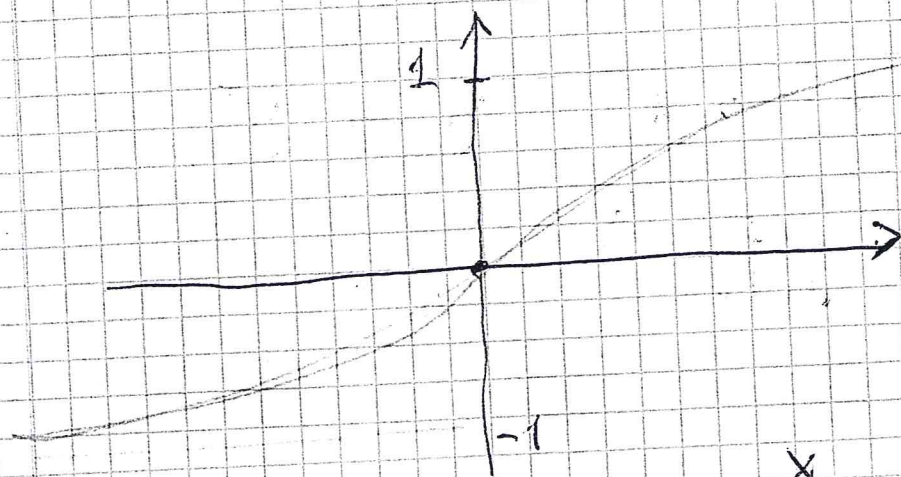
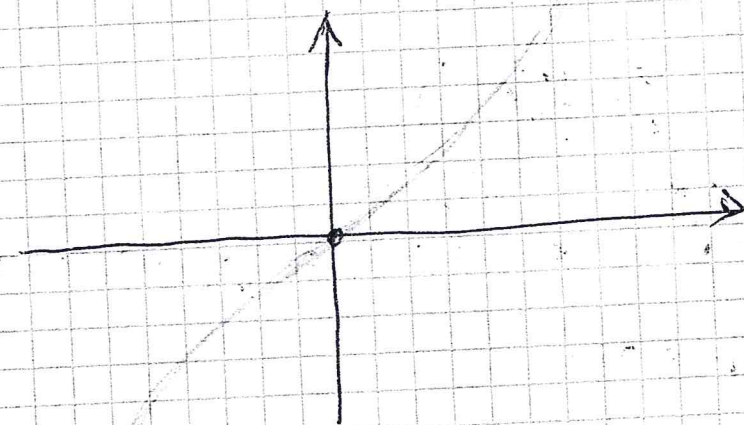
13

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Leuch}(x)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$