

18/9/2018 4ª lezione 9-13

$$y^3 + Py + Q = 0 \quad (4.1)$$

Come trovare le soluzioni  $y$ ? Un trucco molto astuto: scrivere  $y$  nella forma

$$\begin{cases} y = u + v \\ uv = -\frac{P}{3} \end{cases}$$

Simmetria  
rispetto scambio  
 $u$  con  $v$

$$v = -\frac{P}{3u}$$

$$(u + v)^3 + P(u + v) + Q = 0$$

$$\left(u - \frac{P}{3u}\right)^3 + P\left(u - \frac{P}{3u}\right) + Q = 0$$

$$u^3 - \frac{P^3}{27u^3} - \frac{3u^2P}{3u} + \frac{3uP^2}{9u^2} + Pu - \frac{P^2}{3u} + Q = 0$$

$$u^3 - \frac{P^3}{27u^3} + Q = 0$$

$$u^6 + Qu^3 - \frac{P^3}{27} = 0, \text{ lo stesso per } v$$

$$u^3 = z \quad z^2 + Qz - \frac{P^3}{27} = 0$$

$$z = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \quad \text{se } \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} \geq 0$$

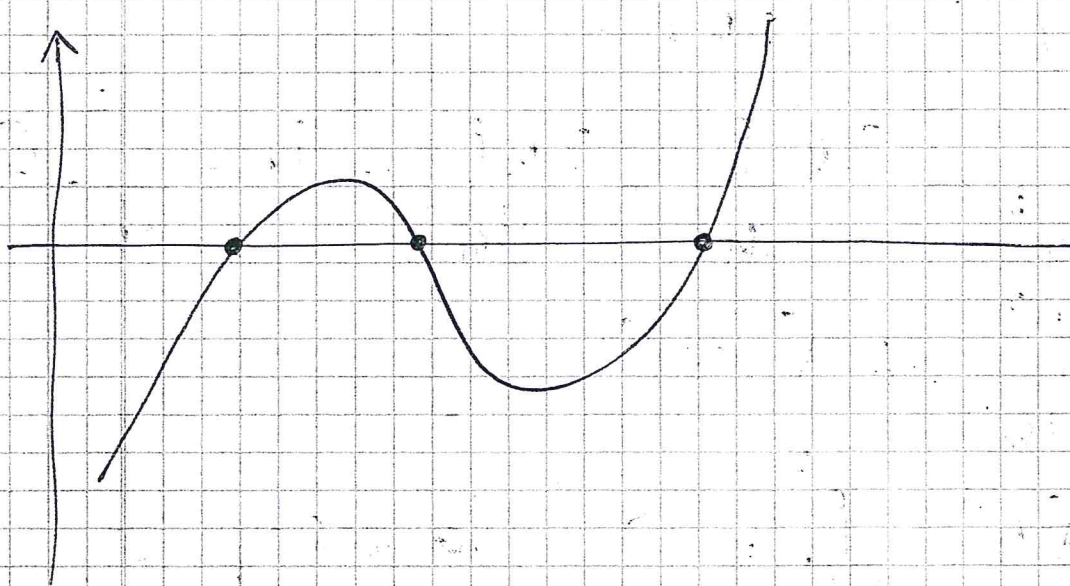


$$\text{Se } \frac{Q^3}{4} + \frac{P^3}{27} < 0$$

Solo ne enari i numeri complessi <sup>3</sup>

$$u^3, v^3 = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^3}{4} + \frac{P^3}{27}} \quad (4.2.1)$$

Da qui in poi devo eshornare le radici cubiche del numero desho di (4.2.1) e di nuovo fare le somme  $\Sigma$ .





OSS 4.3.1 se  $p, q \in K[x]$ ,  $pq = 0$  3

$$\Rightarrow 0 \quad p = 0 \quad 0 \quad q = 0$$

Si dice che  $K[x]$  è dominio di integrità.

OSS 4.3.2  $p, q \in K[x]$

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$$

In particolare  $\deg(pq) \geq \max(\deg(p), \deg(q))$

Ricorda che  $\deg: K[x] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$

DIVISIONE TRA POLINOMI

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 8$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$f, g \in \mathbb{Q}[x]$$

ALGORITMO  
DIVISIONE

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \\ 2x^2 + 3x + 1 \overline{) x^3 - 2x^2 + 2x + 8} \\ \underline{x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x} \end{array}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right)g(x) + \left(\frac{27}{4}x + \frac{39}{4}\right)$$

$$-\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 8$$

$$-\frac{7}{2}x^2 - \frac{21}{4}x - \frac{7}{4}$$

$$\underline{\underline{27x + 39}}$$



Moltiplicare  $g$  per un certo polinomio  
in modo che il  $\text{lt}(\cdot \text{ questo prodotto})$   
 $= \text{lt}(f)$ . Significa qui moltiplicare

$$g \text{ per } \frac{1}{2}x \text{ Risultato:}$$

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Si ottiene un primo resto, della forma

$$h(x) = f(x) - \left( x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) = -\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 8$$

oss. 4.4.1 In generale, se

$$p, q \in K[x], \quad \deg(p) \geq \deg(q)$$

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

$$\deg(p) = n \geq m = \deg(q) \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

appartiene a  $\mathbb{Q}$   $\rightarrow \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q = \frac{\text{lt}(p)}{\text{lt}(q)} q \quad (4.4.1)$

$$= \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} (b_m x^m + \dots + b_0)$$

$$= a_n x^n + \dots$$



5

Nel caso dell'esempio a pagina 3,  
ho moltiplicato  $f$  per  $\frac{a_3}{b_2} x^{3-2} = \frac{1}{2} x$

Questo  $\frac{1}{2} x$  viene messo in alto. Ripeto

la stessa operazione dove al posto di  $f$

ho  $f - \frac{a_3}{b_2} x g$

Si tratta di moltiplicare  $g$  per  $-\frac{7}{4}$

ottenendo  $-\frac{7}{2}x^2 - \frac{21}{4}x - \frac{7}{4}$  (e ultimo)

Si ottiene un quoziente resto, ottenendo come

$$-\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 8 - \left(-\frac{7}{2}x^2 - \frac{21}{4}x - \frac{7}{4}\right)$$

$$= \frac{27}{4}x + \frac{39}{4}$$

A questo punto, si ottiene  $q, r \in \mathbb{Q}[x]$ ,

$$\boxed{f = qg + r}$$

dove  $q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ ,  $r(x) = \frac{27}{4}x + \frac{39}{4}$

(e  $\boxed{\deg(r) < \deg(g)}$ )



Teo 4.6.4. Siano  $f, g \in K[x]$ ,  $g \neq 0$

Allora  $\exists q, r \in K[x]$  tali che

$$f = qg + r$$

dove  $r = 0$  oppure  $\deg(r) < \deg(g)$ .

Inoltre  $q, r$  sono unici.

$q$  si chiama quoziente (della divisione di  $f$  per  $g$ ) e  $r$  si chiama resto.

$$f \xrightarrow{g} h \xrightarrow{r} r$$

La dim. del teo è stata spiegata prima:

parto da  $f$  costruisco  $h = f - \frac{\text{lt}(f)}{\text{lt}(g)} g$

e via di seguito.

Anche l'unicità di  $q, r$  si può dimostrare facilmente.

Es 4.6.1 Se  $\deg(f) < \deg(g)$ , il teo 4.6.1 è ovvio: basta prendere  $q = 0$ ,  $r = f$ .



## ALGORITMO DELLA DIVISIONE

INPUT :  $f, g \in K[x]$ ,  $g \neq 0$

OUTPUT :  $q, r \in K[x]$  tali che

$$f = qg + r, \quad \text{con}$$

$$r = 0 \quad \text{oppure} \quad \deg(r) < \deg(g)$$

INIZIALIZZAZIONE :  $q = 0, r = f$

WHILE  $r \neq 0$  AND  $\deg(r) \geq \deg(g)$

$$q := q + \frac{\text{lt}(r)}{\text{lt}(g)}$$

$$r := r - \frac{\text{lt}(r)}{\text{lt}(g)} g$$

Esempio (di pagina 3)

$$q = 0, \quad r(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 8 \neq 0$$

$$\deg(r) = 3 \geq 2 = \deg(g), \quad g(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$q := 0 + \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x$$

$$r := x^3 - 2x^2 + 2x + 8 - \frac{x^3}{2x^2} (2x^2 + 3x + 1)$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x + 8 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} = -\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 8$$



Donque  $r \neq 0$  e  $2 = \deg(r) \geq 2 = \deg(g)$ .

Faccio un altro ciclo:

$$q = \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{7}{2}x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$$

$$r = -\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 8 + \frac{7}{4}(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= \frac{27}{4}x + \frac{39}{4}$$

$r \neq 0$ ,  $\deg(r) = 1 < \deg(g)$ , STOP.

Esercizio 48. (vedi pag 9) Se conosco le 3 radici

di  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

e le chiamo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , allora

il legame con i coefficienti è:

$$\begin{cases} a_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ a_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 \\ a_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{cases}$$



Esercizio 4.9.1. Sia  $n \in \mathbb{N}$ , siano

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  le radici di

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$$

Allora

$$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

e gli altri coefficienti  $a_j$  sono esprimibili  
"simmetriche" degli  $\alpha_i$ .

Evidentemente,  $f$  è un polinomio in  $K[X]$ ,

e  $\alpha_1 \in K$  è radice di  $f$ ,

$$f(x) = (x - \alpha_1)g(x) + 0$$

$$\deg(g) = \deg(f) - 1$$

e  $\alpha_2 \in K$  è radice di  $f$  ( $\alpha_2$  potrebbe  
essere  $= \alpha_1$  o meno)

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)h(x)$$

$$\deg(h) = \deg(f) - 2$$

se  $\alpha_2 = \alpha_1$  si dice che  $\alpha_1$  è radice doppia  
(di molteplicità 2),  $f(x) = (x - \alpha_1)^2 h(x)$



Def 4.10.1

Se  $f \in K[x]$ ,

1/

$\alpha \in K$  è una radice di  $f$  ( $f(\alpha) = 0$ ),

la molteplicità di  $\alpha$  è definita come segue:

$\text{mult}(\alpha)$  è il massimo intero  $m \in \mathbb{N}$

talé  $(x - \alpha)^m$  divide  $f(x)$

m.g.

$(x - \alpha)^{m+1}$  non divide  $f(x)$

Def 4.10.1  $I \subseteq K[x]$  si dice un IDEALE

di  $K[x]$  se è un sottogruppo

rispetto a  $+$ , e se

o.1)  $fI \subseteq I \quad \forall f \in K[x]$

o.2)  $If \subseteq I \quad \forall f \in K[x]$

(comunque l'anello è commutativo),

$$fI = \{f \cdot h : h \in I\}$$

Sono utili ad esempio per semplificare lo studio dei sistemi di equazioni.



11

Ad esempio, se  $p_1, p_2 \in K[x]$ , posso considerare  
l'ideale generato da  $p_1, p_2$  definito da:

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \left\{ p_1 \alpha + p_2 \beta, \text{ con } \alpha, \beta \in K[x] \right\}$$

Esempio

$$p_1(x) = x - 2$$

$$p_2(x) = x^2 + 1$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \alpha(x)(x-2) + \beta(x)(x^2+1),$$

al variare di  $\alpha, \beta \in K[x]$ .

L'ideale generato da un solo polinomio  $p \in K[x]$   
consiste di tutti quei polinomi che si  
scrivono come  $p \cdot f$ , con  $f \in K[x]$

Teo 4.11 Ogni ideale di  $K[x]$  è

generato da un solo elemento

(si dice che  $K[x]$  è a ideali principali).

Dim Sia  $I \subseteq K[x]$  un ideale.

Voglio dimostrare che  $I = \langle p \rangle$  per  
un certo  $p \in K[x]$ .



102  
sia  $g \in I$ ,  $g \neq 0$ , tale che

$g$  abbia grado minimo tra tutti gli  
elementi di  $I$ . Sia adesso  $f \in I$ .

Dal lem 4.6.1 esiste  $q, r \in K[X]$

$$f = qg + r$$

dove o  $r=0$  oppure  $\deg(r) < \deg(g)$

osservo che  $f \in I$ ,  $qg \in I$  (dalla 4.6.1)

$\Rightarrow f - qg \in I$  (dalla Def. 4.6.1).

Donque  $r \in I$ . Ma  $\deg(r) < \deg(g)$

$\Rightarrow r=0$ , poichè non possono  
esistere elementi di  $I$  con grado  
minore del grado di  $g$ . Allora

$$f = qg$$

Donque qualunque elemento di  $I$  è  
necessariamente "multiplo" di  $g$ .  $\square$



<sup>13</sup>  
 $g$  può essere moltiplicato per una costante  $a \in \mathbb{K}$ ,  
 $a \neq 0$  (e questo non modifica  $\deg(g)$ ).

Def 4.13.1 Siano  $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x]$  non <sup>costanti</sup> ~~costanti~~.

Si definisce  $\text{mcd}(f_1, f_2)$  di  $f_1, f_2$

un polinomio  $g \in \mathbb{K}[x]$  tale che:

1)  $g$  divide  $f_1$ ,  $g$  divide  $f_2$

2) se  $h \in \mathbb{K}[x]$ ,  $h$  divide  $f_1$  e  $f_2$ , allora  $h$  divide  $g$

3)  $g$  è monico ( $\text{lc}(g) = 1$ )