

PrecoR lezione 3

6/9/19

9-13

1

Ricapitolazione su (alla lavagna):

Grafici di funzioni, immaginarie ecc.

funzioni iniettive, suriettive e

relazione con l'invertibilità

Interpretazione geometrica delle
parametrizzazioni del cerchio con

$$t = \tan(\theta/2)$$

oss $a = -1$ (metabo in Def P2.16.1)

$$q = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$a^q = (-1)^q = \left((-1)^1\right)^{1/3} = (-1)^{1/3}$$

$= -1$

$$a^q = a^{2/6} = (a^2)^{1/6} = 1$$

perché $n=3$ e

dispari, e $f_2(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è invertibile

ES. 13.15.1

$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$

$$f_n(x) = x^n \quad \forall x \geq 0$$

$$f_m(x) = x^m \quad \forall x \geq 0$$

$$g_n(y) = y^{\frac{1}{n}} \quad \forall y \geq 0$$

$$g_m(y) = y^{\frac{1}{m}} \quad \forall y \geq 0$$

$$g_n = f_n^{-1}, \quad g_m = f_m^{-1}$$

(niente a che vedere con $\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f_m}$!!!)

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = g_m\left(y^{\frac{1}{n}}\right) = g_m\left(g_n(y)\right)$$

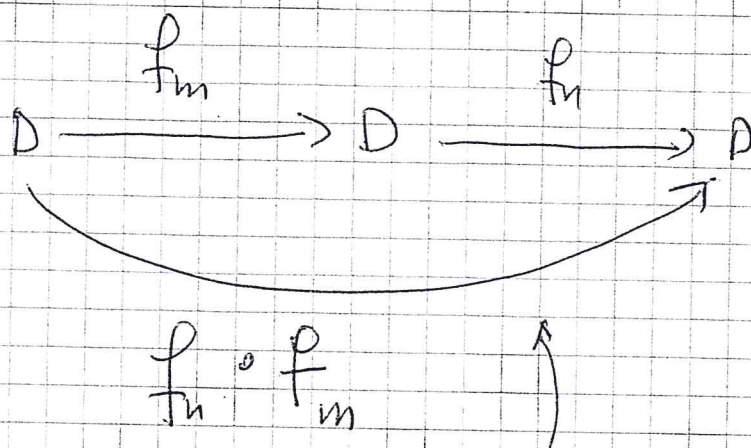
$$= f_m^{-1}\left(f_n^{-1}(y)\right) = \left(f_m^{-1} \circ f_n^{-1}\right)(y)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & f_n^{-1}(y) & \xrightarrow{\quad} & f_m^{-1}(f_n^{-1}(y)) \\ D & \xrightarrow{f_n^{-1}} & D & \xrightarrow{f_m^{-1}} & D \end{array}$$

Dico che

13

(P3.3.1) $f_m^{-1} \circ f_n^{-1} = (f_n \circ f_m)^{-1}$ Infatti



Per rovesciare questa mappa, ottenendo

$$f_m^{-1} \circ f_n^{-1}$$

Allora $(y^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \xrightarrow{\uparrow} f_m^{-1} \circ f_n^{-1}(y)$

pag 2

$\stackrel{(P3.3.1)}{=} (f_n \circ f_m)^{-1}(y)$

$$f_m(x) = x^m$$

$$f_n(f_m(x)) = f_n(x^m)$$

$$= (x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

(E NON x^{m^n} !!)

$$\Rightarrow (f_n \circ f_m)^{-1}(y) = y^{\frac{1}{m \cdot n}} \Rightarrow (y^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$$

Prima di affrontare il problema a pg 16

Dimostrare un ^{paio di} Teoremi (teo P3.4.1 e P3.6.1)

Def P3.4.1 Siano X, Y insiemi non vuoti, sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione. f si dice invertibile se

esiste una funzione $g: Y \rightarrow X$ tale che

$$g \circ f = \text{id}_X \quad (\text{P3.4.1})$$

$$f \circ g = \text{id}_Y \quad (\text{P3.4.2})$$

Una tale g si chiama ^{una} inversa di

f e si indica con f^{-1} (che non ha niente a che vedere con $\frac{1}{f}$)

Teo P3.4.1 Se f è invertibile, allora

g è unica. (g è l'inversa di f)

Potremo dunque parlare dell'inversa di f

• Dim. Supponiamo che $g_1, g_2: Y \rightarrow X$

Siano due inverse di f . Fatto vedere
che $g_1 = g_2$.

$$(P3.5.1) \quad (g_2 \circ f) \circ g_1 \stackrel{\uparrow}{=} g_2 \circ (f \circ g_1)$$

Vale la propr. associativa
della $\circ$.

Dato che g_2 è inversa di f , $g_2 \circ f =$

$(P3.4.1) \quad = \text{id}_X$, e dato che g_1 è

inversa di f , $f \circ g_1 \stackrel{(P3.4.2)}{=} \text{id}_Y$.

Dunque, dalla $(P3.5.1)$ deduco

$$\text{id}_X \circ g_1 = g_2 \circ \text{id}_Y$$

$$\text{allora} \quad g_1 = g_2$$

□

Def. P3.6.1 $f: X \rightarrow Y$ si dice

iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$

biiettiva se è iniettiva e suriettiva.

Def. P3.6.2 $f(X) := \{ y \in Y: \exists x \in X, f(x) = y \}$ si chiama immagine di f , indicata anche con $\text{Im}(f)$

Nota l'abuso di notazione $f(X)$,

indici f è una funzione di punto, mentre X è un insieme, non un punto.

Teo. P3.6.1 Siano X, Y insiemi non vuoti, sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Sono equivalenti:

(i) f è invertibile

(ii) f è biiettiva

Questo teorema dà un criterio
per decidere se una funzione è invertibile:
bisogna controllare che sia iniettiva e
suriettiva. Le proprietà dell'inversa
vanno poi stabilite successivamente.

ES P3.7.1 (casa) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
strettamente crescente e invertibile.
Allora f^{-1} è strettamente crescente.

Dim (teo P3.6.1).

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sia f invertibile. Dobbiamo dimostrare che
 f è suriettiva e iniettiva. Sia g l'inversa di f .

Suriettività di f : sia $y \in Y$; calcoliamo

$g(y) =: x \in X$. Si ha

$$f(x) = f(g(y)) \stackrel{(P3.6.2)}{=} y$$

Dunque f è suriettiva

Iniettività: Supponiamo $x_1, x_2 \in X$,

e $f(x_1) = f(x_2)$.

Chiamiamo $y := f(x_1) = f(x_2)$

Si ha

$$g(y) = g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$\parallel (P_{3.4.1})$

$\parallel (P_{3.4.1})$

x_1

x_2

$\Rightarrow x_1 = x_2$. Dunque f è iniettiva.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supponiamo che f sia

biiettiva. Voglio trovare una funzione

$g: Y \rightarrow X$ che verifichi (P3.4.1),

(P3.4.2) (e la trovo, sarà unica

dal teo P3.4.1. In realtà l'unicità
viene fuori anche dalla costruzione che
stiamo per fare).

Sia $y \in Y$. Dalla suriettività di f ,

$\exists x \in X: f(x) = y$. Ma poiché f

• f è iniettiva, tale x è unico.

Posso dunque definire una funzione che a y associa x , così definita

$$g(y) := x.$$

• Dico che tale g è la funzione cercata.

Calcolo $f(g(y))$. Si ha

$$f(g(y)) = f(x) = y,$$

che equivale alla (P3.4.2).

• Sia ora $x \in X$; si ha

$$g(f(x)) = g(y) = x,$$

che equivale alla (P3.4.1).

• Dunque f verifica (P3.4.1), (P3.4.2), la cui f è invertibile.



POTENZA AD ESPONENTE RAZIONALE
Torniamo finalmente alla Def. P2.16.1;

20

sia $a > 0$ (fondamentale!)

sia $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e supponiamo

anche $q = \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}$. $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, $mn' = m'n$ (*)

$n, n' \in \mathbb{N}$, $m, m' \in \mathbb{Z}$

Voglio dimostrare

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} \quad (\text{P3.10.1})$$

Se lo dimostro, a^q è ben definito,
cioè non dipende dalla rappresentazione
di $q \in \mathbb{Q}$. Si ha, dato che $n' > 0$,

$$a^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{nn'}}\right)^{n'} = b^{n'}$$

dove ho posto $b = a^{\frac{1}{nn'}}$. Nello stesso modo

$$a^{\frac{1}{n'}} = b^n$$

$$a^{\frac{1}{n}} = b^{n'}$$

$$a^{\frac{1}{n'}} = b^n$$

Donque $(a^{\frac{1}{n}})^m = (b^{n'})^m = b^{n'm}$,

$$(a^{\frac{1}{n'}})^{m'} = (b^n)^{m'} = b^{nm'}$$

Ma $b^{n'm} = b^{nm'}$ dalla (*).

Ne segue

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n'}})^{m'}$$

che è la (P3.10.1).

Donque il problema a pg 16 non
sussiste quando $a > 0$.

oss La funzione $a \rightarrow a^q$

con $a > 1$ e $q \in \mathbb{Q}$ è strettamente
crescente.

Esercizio (in casa). Valgono le seguenti

proprietà, valide in $a > 0$:

$$1) a^{q+q'} = a^q a^{q'} \quad \forall q, q' \in \mathbb{Q}$$

$$2) (a^q)^{q'} = a^{qq'} \quad \forall q, q' \in \mathbb{Q}$$

(E NON $a^{q^{q'}}$!!)

$$2') (a^q)^{q'} = 1^{q'} a^{qq'} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall q, q' \in \mathbb{Q}$$

$$3) a^{-q} = \frac{1}{a^q} = (a^q)^{-1} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

POTENZA AD ESPONENTE REALE

Vorrei, in $a > 0$, fare a^x con $x \in \mathbb{R}$.
Questo è molto più difficile di quanto fatto in precedenza, e richiede strumenti del corso di Analisi 1. Quello che serve è:

1) densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, cioè

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \delta$$

2) la stretta crescita di $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \frac{a^q - 1}{q}$,
con $a > 1$

- 3) la definizione di limite, estremo superiore e estremo inferiore.

Teo P3.13.1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sia } a > 0. \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

$$\exists \lim_{q \rightarrow x} a^q =: a^x \text{ su } \mathbb{Q}$$

Inoltre tale limite, se $x \in \mathbb{Q}$, coincide con a^x .

Questo teorema sarà conseguenza del corso di Analisi 1.

Si possono dimostrare: sia $a > 0$;

$$2) (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$

$$\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

$$1) a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$$

$$3) (a \lambda)^x = a^x \lambda^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \\ \forall \lambda > 0$$

$$4) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$