

17/9/2018

3^a lezione 9-13

1

Es 3.1.1 Se n è dispari dimostrare che

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \dots - a + 1)$$

dove $a \in \mathbb{R}$

Es 3.1.2 Se n è dispari, $a, b \in \mathbb{R}$

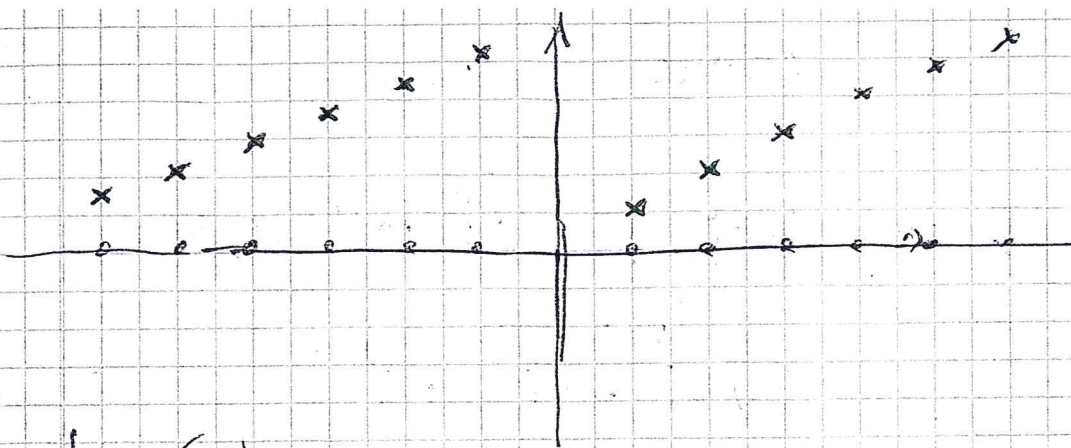
$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Suggerimento: vedi pag 9 lezione 2

Continuazione del Prop. 2.17.1: in modo analogo si dimostra

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \quad z_1 < z_2 < 0 \Rightarrow h(z_1) < h(z_2)$$

Resta ancora da dire la tesi. Infatti è facile trovare esempi di una funzione $f: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ che è
 strictly crescente in $(-\infty, 0) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$
 e strictly crescente in $(0, +\infty) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \mathbb{N}$
 non strictly crescente in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.



$$\text{data}(f) = \dots$$

$$\text{graph}(f) = \times \times \times \times$$

Per concludere la data, basta data che

$$h(-1) < h(1)$$

$$\frac{a^{-1} - 1}{-1} < \frac{a^1 - 1}{1}$$

$$1 - \frac{1}{a} < a - 1$$

$$a + \frac{1}{a} > 2$$

$$a^2 + 1 > 2a$$

$$a^2 - 2a + 1 > 0$$

$$(a-1)^2 > 0$$

□

Ricordo che abbiamo definito a^q , $q \in \mathbb{Q}$
(e $a > 0$). Vale la

Prop 3.3.1 La funzione, dato $a > 1$,

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(q) = \frac{a^q - 1}{q}$$

è strettamente crescente.

Dim Si tratta di dire che

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q_1 < q_2 \Rightarrow g(q_1) < g(q_2).$$

Posso scrivere

$$q_1 = \frac{m}{n}, \quad q_2 = \frac{m'}{n},$$

con $m, m' \in \mathbb{Z}, \sqrt[n]{m < m'}, n \in \mathbb{N}$. Devo allora vedere

$$\frac{a^{\frac{m}{n}} - 1}{\frac{m}{n}} < \frac{a^{\frac{m'}{n}} - 1}{\frac{m'}{n}}$$

Cioè

$$\frac{a^{\frac{m}{n}} - 1}{m} < \frac{a^{\frac{m'}{n}} - 1}{m'}$$

$$\frac{(a^{\frac{1}{n}})^m - 1}{m} < \frac{(a^{\frac{1}{n}})^{m'} - 1}{m'}$$

(dalla Def. 2.13.1).

Quest'ultima dis-

uguaglianza è l'ultima disuguaglianza del Prop. 2.17.1

4
Con $a^{\frac{1}{n}}$ al posto di a , dato che
 $a > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > 1$ $\square$

Adesso, la monotonicit  e la densit  dei razionali in $\mathbb{R}$
ci permettono con una quantita di
limiti, di definire, per $a > 1$,

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x$$

ed anche questo

5.3.1 (facoltativo):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta > 0$$

$$\forall q, q' \in \mathbb{Q}, q' > q$$

$$q' - q < \delta$$

$$\text{si ha } a^{q'} - a^q < \varepsilon$$

suggerimento: usare la Propriet  precedente

logica della limiti

si usa Esercizio 3.4.1, il quale segue
dalla Prop. 3.3.1. Si usa qualche
altra operazione e cos  infine si arriva
a definire a^x .

Note importante: se $a \in (0, 1)$ si definisce ⁵

$$a^x := \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teo 3.5.1 La funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$

è ben definita per ogni $a > 0$.

Se $a > 1$ essa è strettamente crescente.

Se $a \in (0, 1)$ essa è strettamente decrescente.

Inoltre l'immagine di questa funzione è

$$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad \text{se } a > 1 \text{ oppure } 0 < a < 1.$$

Valgono le seguenti proprietà:

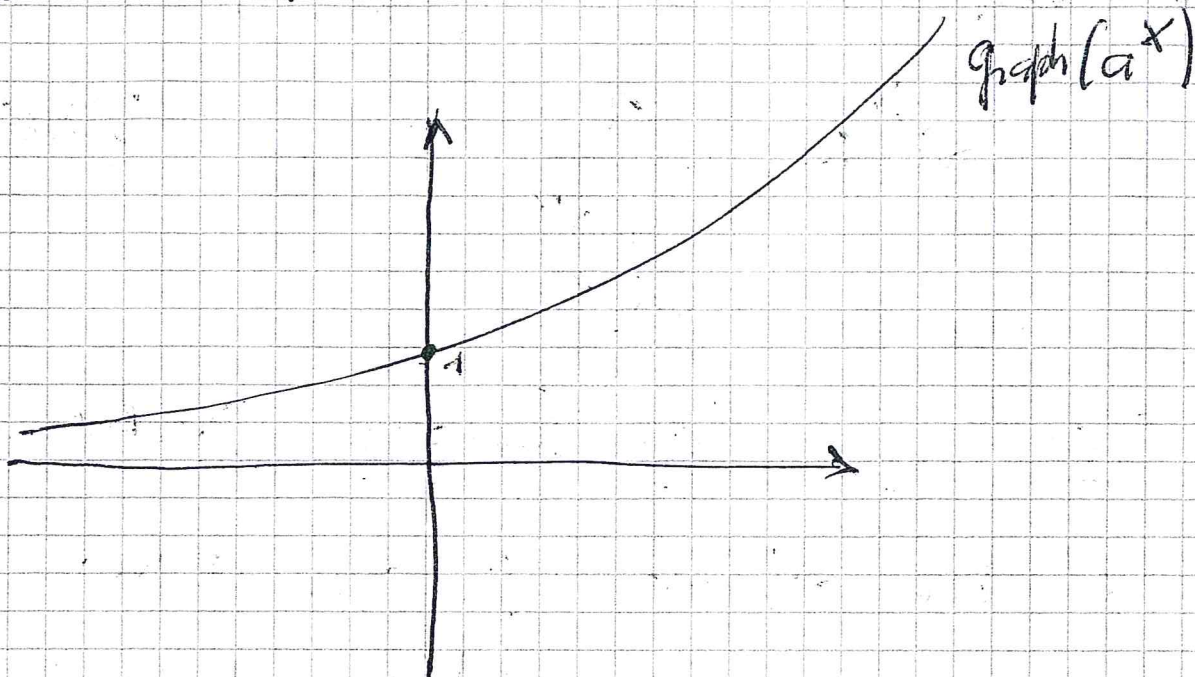
$$(a^s)^t = a^{st} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$a^{s+t} = a^s a^t$$

$$(ab)^s = a^s b^s \quad \forall a, b > 0$$

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s}$$

Esercizio 3.6.1. Se $a > 1$



Esercizio 3.6.1 disegnarla per $a > 1$, il grafico di a^x

Tutto questo permetterebbe di disegnare il grafico di $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$.

Logaritmo ^(reale) in base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Si definisce

$$g_a(x) = \log_a x \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

(log in base a di x)

l'inversa di a^x . Abbiamo

$$g_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^+$

ES 3.7.1 Grafico di $\log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$

In altre parole, $\left\{ \begin{array}{l} \text{dato } y > 0, \\ \log_a y \end{array} \right\}$ è l'unica
soluzione $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$a^x = y$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\log_a(y \cdot \eta) = \log_a y + \log_a \eta$$

$$\log_a(y^{-1}) = -\log_a y$$

$$\log_a(y) \log_y(\eta) = \log_a(\eta)$$

Tipicamente spesso si sceglie e come
base (Numero di Nepero), definito
ad esempio come $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \in (2, 3)$.

Il logaritmo in base e si chiama
logaritmo naturale, e si indica $\log$
(a volte anche indicato con $\ln$)

DISEQUAZIONI E POLINOMI IN UNA VARIABILE

Sia $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ anche, ma aspettando l'inizio dei corsi)

$K[x]$ = insieme dei polinomi nella variabile x , a coefficienti in K .

Polinomio è una espressione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ovvero una somma FINITA di monomi

della forma $a_j x^j$, con $a_j \in K$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

e $x \in \mathbb{R}$ (la variabile); $a_n \neq 0$

Esempio $3x^2 + 1$

$$4x^3 + 3x + 6$$

$$\pi x^9 + ex^4 + 1$$

$a_0 = a_0 x^0$ termine noto

$a_n = \text{lc}(p)$. Se $a_n = 1$ il polinomio si dice MONICO

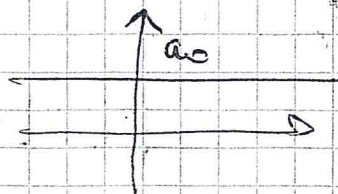
$n = \deg(p)$ grado di p

$a_n x^n = \text{lt}(p)$ monomio di grado massimo

Polinomi più semplici:

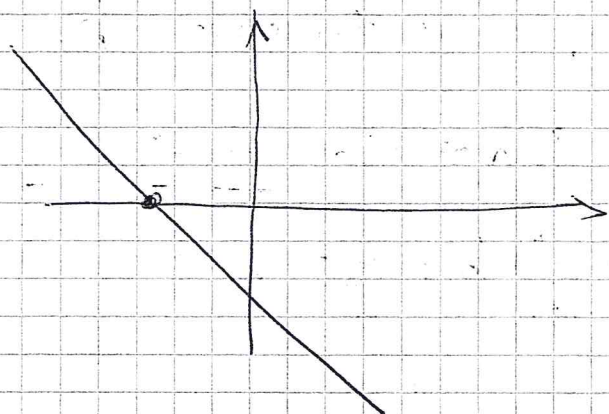
$$p(x) = a_0$$

costante



$$p(x) = a_1 x + a_0$$

1° grado (lineare)
 $a_1 \neq 0$



$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_2 \neq 0$$

Voglio farlo assomigliare a una somma di quadrati:

$$p(x) = a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right)$$

(posso dividere per $a_2 \neq 0$)

$$= a_2 \left(\left(x + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \right)^2 + \frac{a_0}{a_2} - \frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2} \right)$$

È un polinomio di, se cambio lettera,

$$X = x + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2}$$

$$A_0 = \frac{a_0}{a_2} - \frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$\underline{p(x)} = X^2 + A_0$$

Def 3.10.1. $\lambda \in K$ si dice radice di p $\iff$

se $p(\lambda) = 0$

se $\deg(p) = 1$ in $\mathbb{C}$ è una sola radice reale

se $\deg(p) = 2$, anch'esso $\exists \lambda \in K$

di $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ($a_2 \neq 0$)

equiv. $\lambda^2 + \frac{a_1}{a_2} \lambda + \frac{a_0}{a_2} = 0$

equiv. $\left(\lambda + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \right)^2 + \frac{a_0}{a_2} - \frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2} = 0$

$\left(\lambda + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}$

3.10.1)

$$= \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2} =: \frac{\Delta}{4a_2^2}$$

In questo caso $K = \mathbb{R}$ (molto più
"bello" è $K = \mathbb{C}$), e dunque
affinché esista qualche $\lambda \in K$ che
verifichi (3.10.1), è necessario

3.10.2)

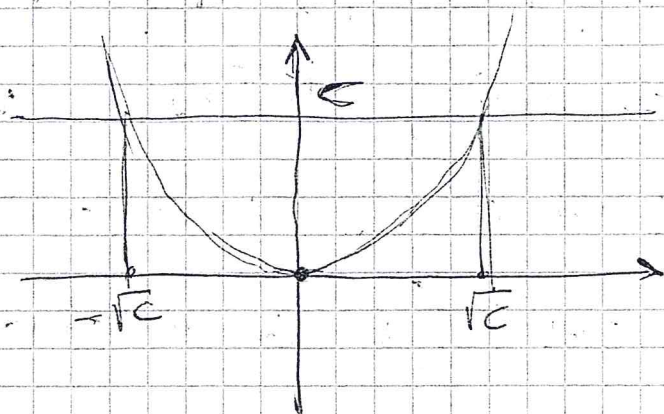
$$a_1^2 - 4a_0a_2 \geq 0$$

Se questo è vero $\lambda + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{a_2^2}}$

$$z^2 = c \geq 0$$

$$z \in \mathbb{R}$$

11



$$z = \pm \sqrt{c}$$

No soluzioni reali se $c < 0$ (ma 2 complesse...)

Le due radici reali sotto la condizione (3.10.2) sono

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{a_2^2}} \\ -\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{a_2^2}} \end{cases}$$

che sono tra loro distinte se e solo se
in (3.10.2); e vale $=$, cioè se $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$,
allora ha una sola radice con molteplicità
due (contata 2 volte).

ES

$$p(x) = a_2 \cdot (x - \lambda_1)(x - \lambda_2),$$

con λ_1, λ_2 le 2 radici (eventualmente coincidenti)

I polinomi tra loro si possono sommare,
e moltiplicare. $p+0=p$, $p \cdot 1=p$

L'insieme dei polinomi, $K[x]$, con
le 2 operazioni $+$ e $\cdot$, si chiama
anello dei polinomi (è commutativo).

Esercizio

$$(x-2)(x^2+1-2x) \leq 0$$

$$x-2 \leq 0 \quad \text{e} \quad x^2+1-2x \geq 0 \quad (3.12.1)$$

o
oppure

$$x-2 \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2+1-2x \leq 0 \quad (3.12.2)$$

$$(3.12.1) \quad x \leq 2 \quad \text{e} \quad (x-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x \leq 2 \quad \text{tutte le soluzioni.}$$

$$(3.12.2) \quad x \geq 2 \quad (x-1)^2 \leq 0$$

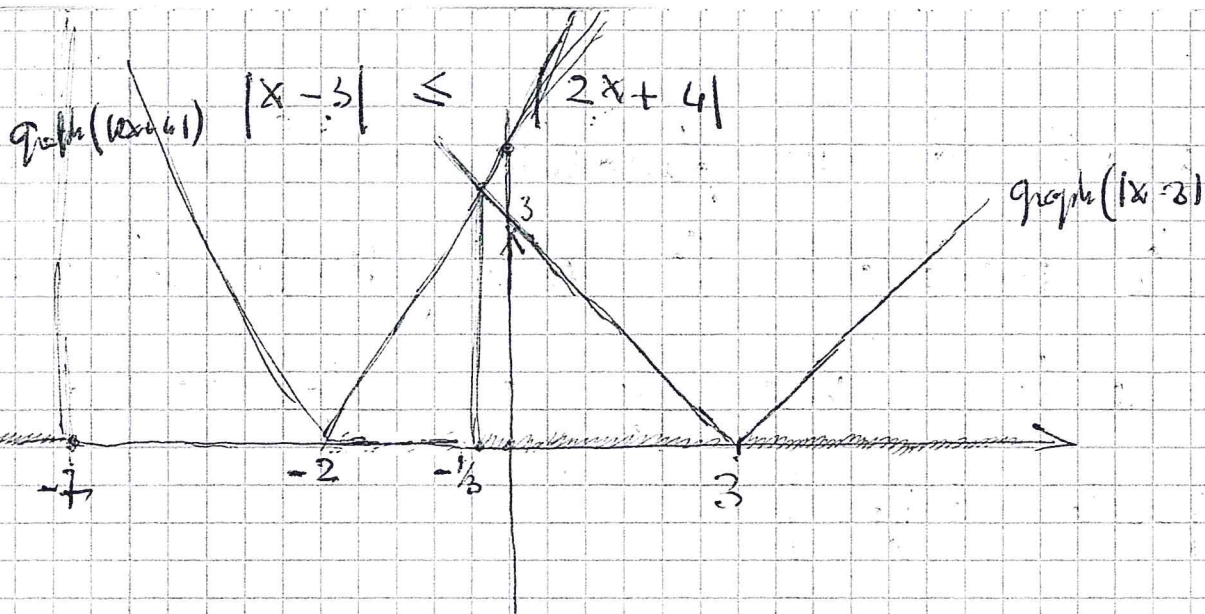
$$x \geq 2 \quad \text{e} \quad x=1 \quad \text{no soluzioni.}$$

Esercizio

$$\frac{|x-3|}{|2x+4|} \leq 1$$

$$x \neq -2$$

$$|x-3| \leq |2x+4|$$



$$2x+4 = 3-x$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$-2x-4 = 3-x$$

$$x = -7$$

Le soluzioni sono;

$$-\infty < x \leq -7 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{3} \leq x < +\infty$$

In altro modo: usando esercizio 1.3.2,

$$|x-3| \leq |2x+4|$$



$$-|2x+4| \leq x-3 \leq |2x+4|$$

Due disuguaglianze da studiare separatamente:

$$x \leq 3 + |2x+4|$$

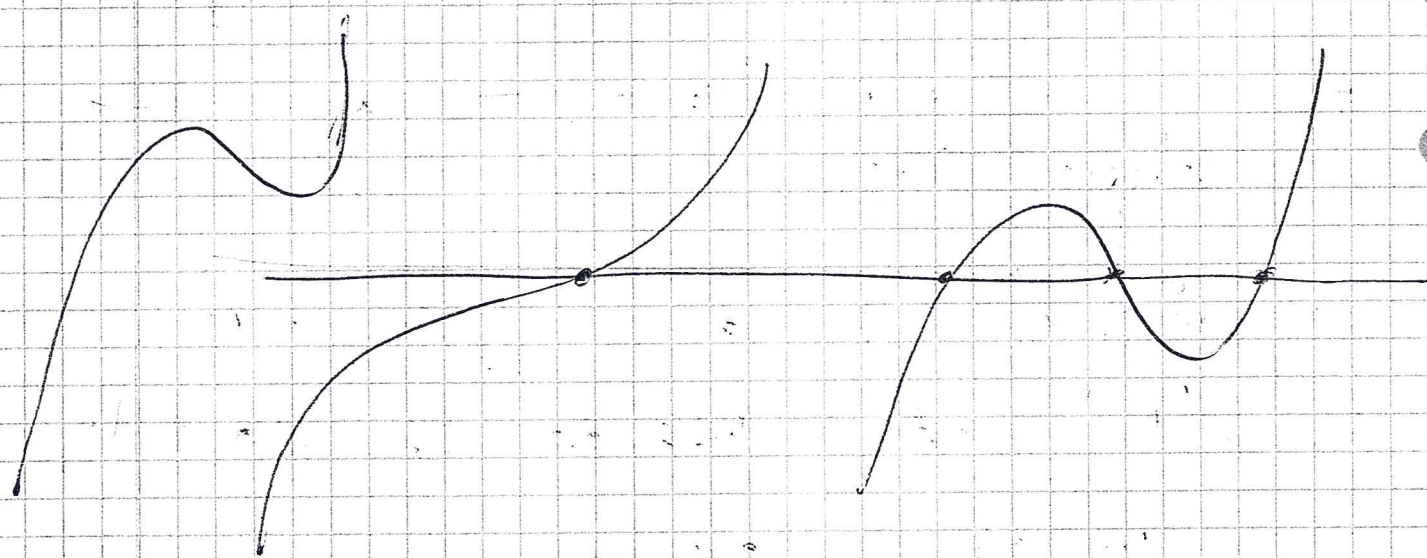
$$= \begin{cases} 3 + 2x+4 & \text{se } x > -2 \\ 3 - 2x-4 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

continuando a casa

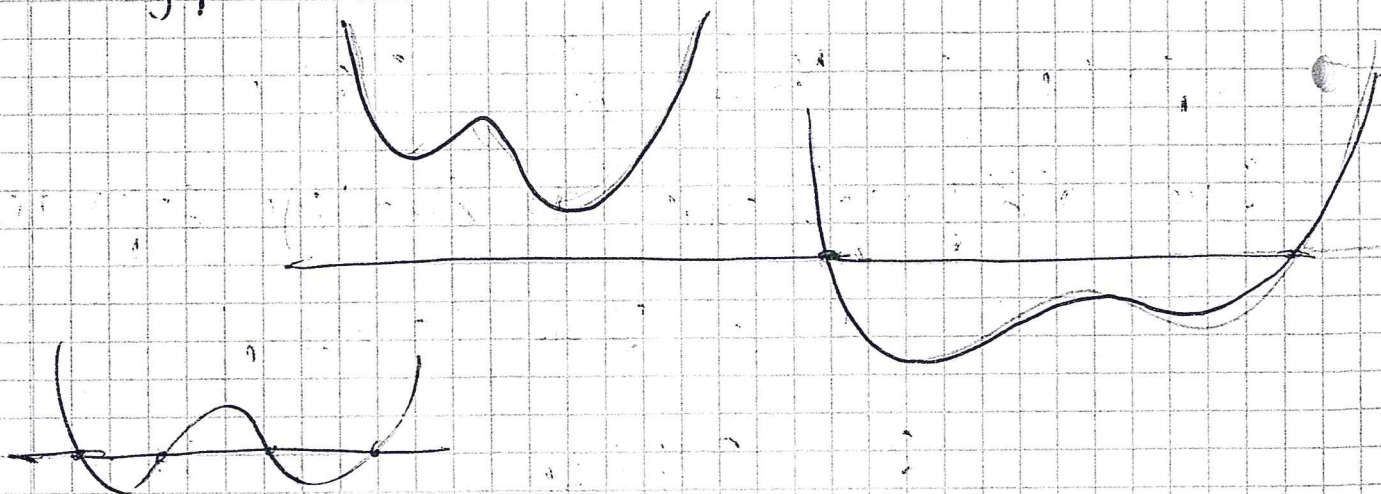
16

Le radici di un polinomio di 3° è
difficile trovare. Ce ne è sempre almeno
una reale (vero per ogni polinomio
di grado dispari)

$$x^3 + 3x^2 - 6x + 14$$



Le radici di un polinomio di 4° : ancora
+ difficile



$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = \frac{y}{3} - \frac{b}{3a}$$



$$y^3 + py + q = 0$$

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

Suff. di dividere per a :

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

$$B = \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{c}{a}$$

$$D = \frac{d}{a}$$

$$x = y - \frac{B}{3}$$

$$\left(y - \frac{B}{3}\right)^3 + B\left(y - \frac{B}{3}\right)^2 + C\left(y - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

$$y^3 + (-B + B)y^2$$

$$+ \left(\frac{B^2}{3} - \frac{2B^2}{3} + C\right)y$$

$$+ -\frac{B^3}{27} + \frac{B^3}{9} - \frac{CB}{3} + D$$

$$= y^3 + Py + Q, \quad P = -\frac{1}{3}B^2 + C$$

$$Q = \frac{2}{27}B^3 - \frac{CB}{3} + D$$

$$y^3 = -Py - Q$$

