

Def. P2.1.1 ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ha $T \in \mathbb{R}, T > 0$

Si dice che f è T periodica se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se f è T -periodica allora è $2T$ -periodica, $3T$ -periodica, ad esempio

$$f(x+2T) = f(x+T+T)$$

$$= f(x+T) = f(x).$$

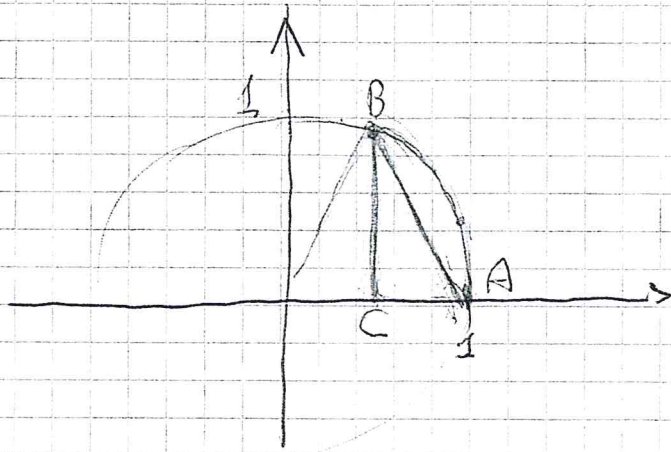
Per T -periodica, intendiamo il
+ più piccolo $T > 0$ per cui vale $f(x+T) = f(x)$

$\sin \theta, \cos \theta$ sono 2π -periodici. Inoltre

$$\sin \theta = -\sin(-\theta) \quad \sin \theta \text{ è dispari}$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta) \quad \cos \theta \text{ è pari}$$

$$|\sin \theta| < 1, \quad |\cos \theta| < 1$$

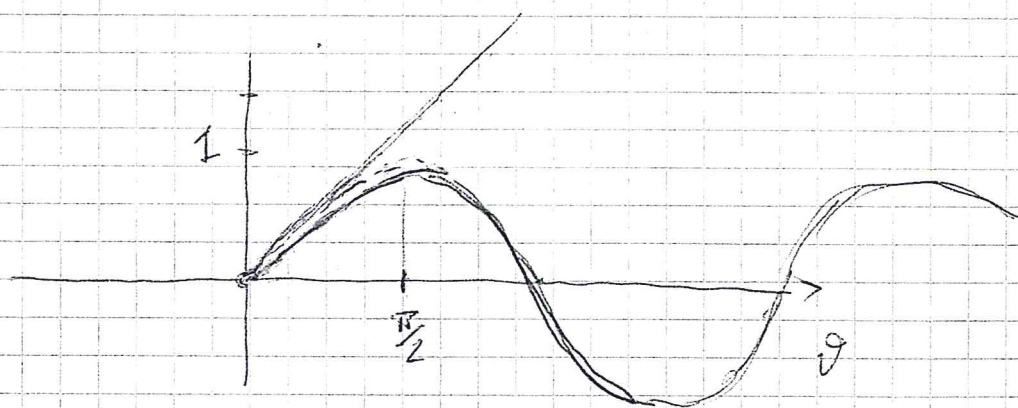


Se $\theta \in (0, \pi/2)$

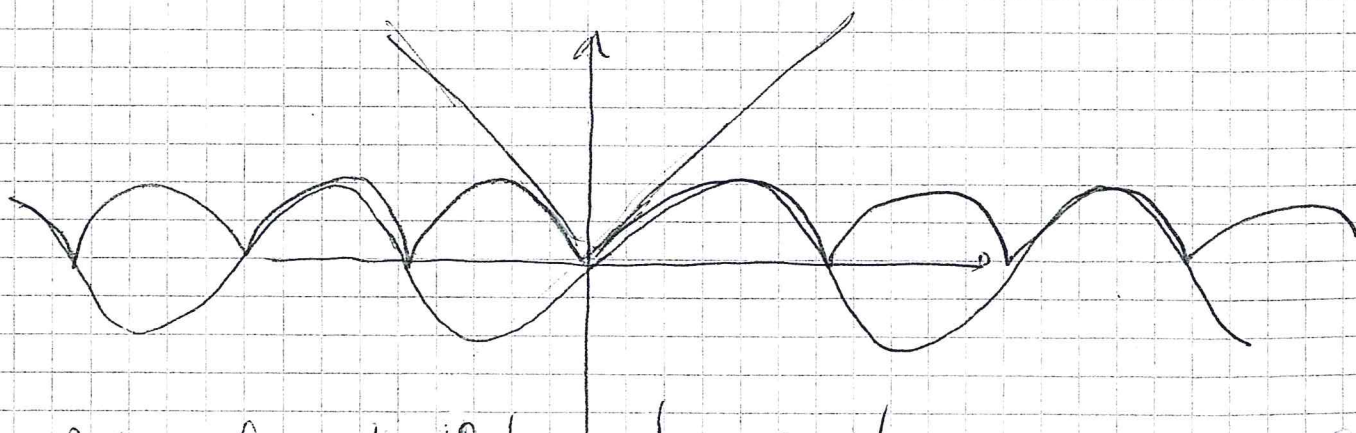
$\text{length}(\widehat{BA})$



$$\sec \theta = \text{length}(BC) < \text{length}(BA) < \theta$$



$$\Rightarrow \sec \theta < \theta \quad \forall \theta > 0$$



Nota che $|\sec \theta| = |\sec(-\theta)|$ segue

$$\Rightarrow |\sec \theta| < |\theta| \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$$

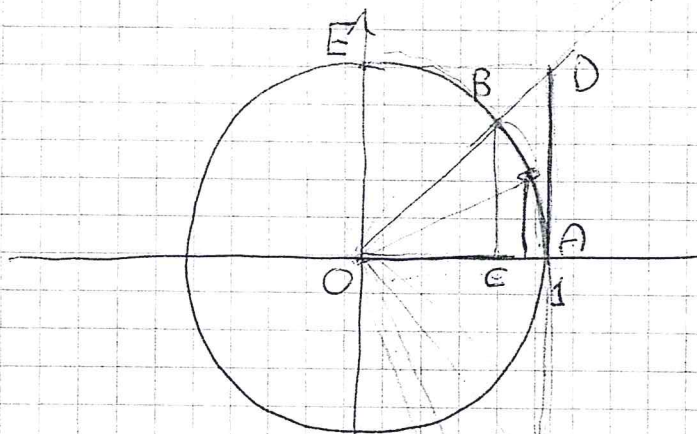
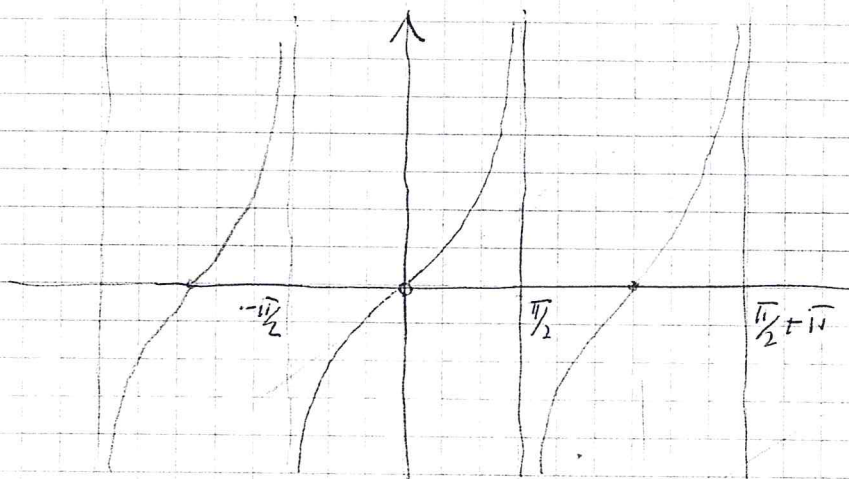
$$\textcircled{1} \quad \text{tg } \vartheta := \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$$

$$\text{tg } \vartheta = -\text{tg}(-\vartheta)$$

$$\forall \vartheta \in \text{dom}(\text{tg}) =$$

$$= \{ \vartheta \in \mathbb{R} : \cos \vartheta \neq 0 \}$$

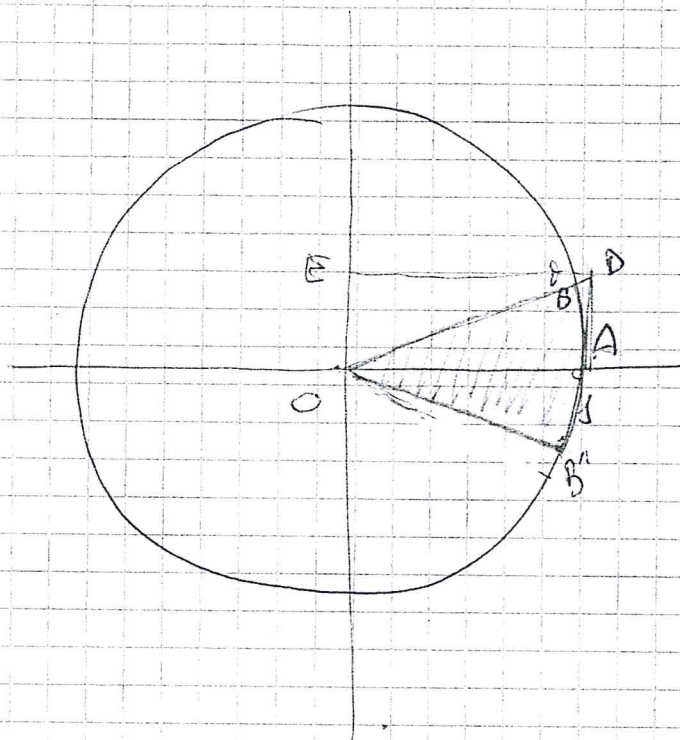
$$= \{ \vartheta \in \mathbb{R} : \vartheta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$



$$(0, \pi/2) \ni \vartheta = \text{length}(\widehat{AB}), \quad \text{tg } \vartheta = \frac{\text{length}(BC)}{\text{length}(CO)} = \frac{\text{length}(DA)}{\text{length}(AO)}$$

$$= \text{length}(DA) > \widehat{AB}$$

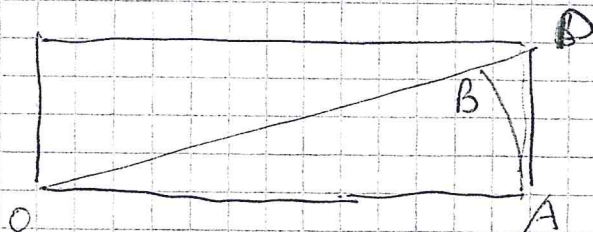
$$\text{length}(DA) = 1 \cdot \text{length}(DA) = \text{Area}(\text{rectang}(OADE))$$



$$\text{Area}(\text{OADE}) > \text{Area}(\text{OB'B})$$

E' evidente, infatti

$$\frac{1}{2} \text{Area}(\text{OADE}) > \text{Area}(\text{OAB})$$



infatti $\triangle OAD \not\equiv \triangle OAB$ triangolo curvilineo

Def. P2.5.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervallo

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice strett. crescente
se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Si dice non decrescente

$\& \quad \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f si dice strett. decrescente $\& -f$ è strett. cresc.

f si dice non crescente $\& -f$ è non decresc.

$\text{tg}: (0, \pi/2) \rightarrow (0, +\infty)$ è strett.
crescente

Def. P2.5.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalllo, $J \subseteq \mathbb{R}$ intervalllo

$f: I \rightarrow J$ si dice iniettiva

Se 1) $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

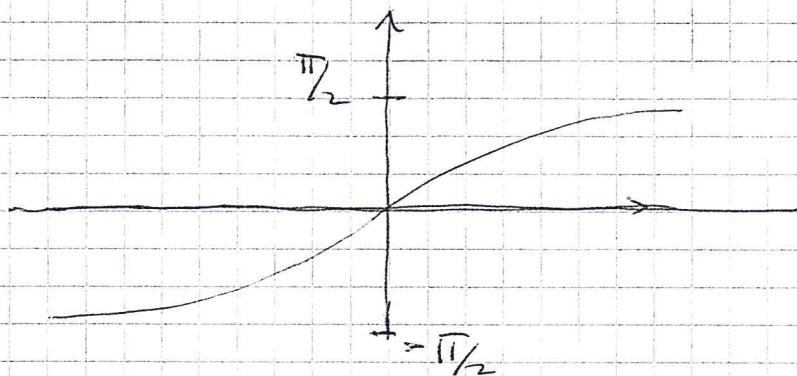
f è iniettiva

2) $\forall y \in J \exists x \in I: f(x) = y$

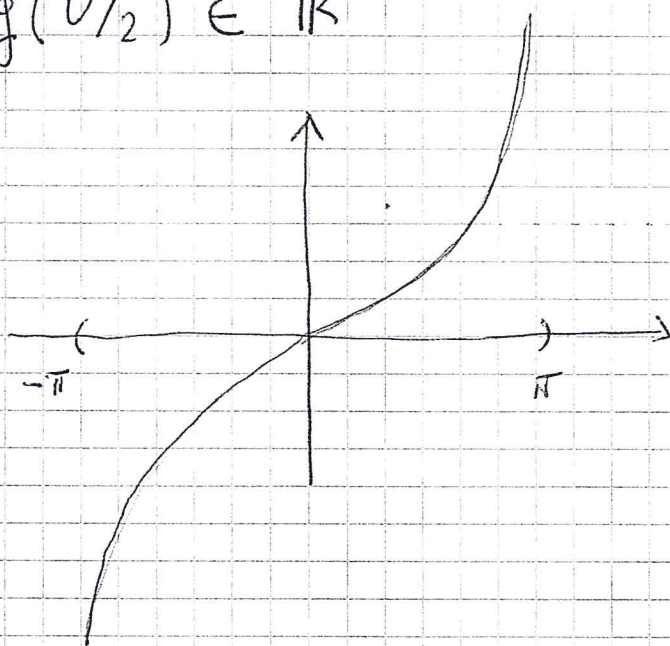
f è suriettiva

La $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile 6

L'inversa è $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$



$$(-\pi, \pi) \ni \vartheta \rightarrow \tan(\vartheta/2) \in \mathbb{R}$$



$$\begin{cases} \sin \vartheta = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos \vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 = \frac{4t^2 + 1 + t^4 - 2t^2}{(1+t^2)^2}$$

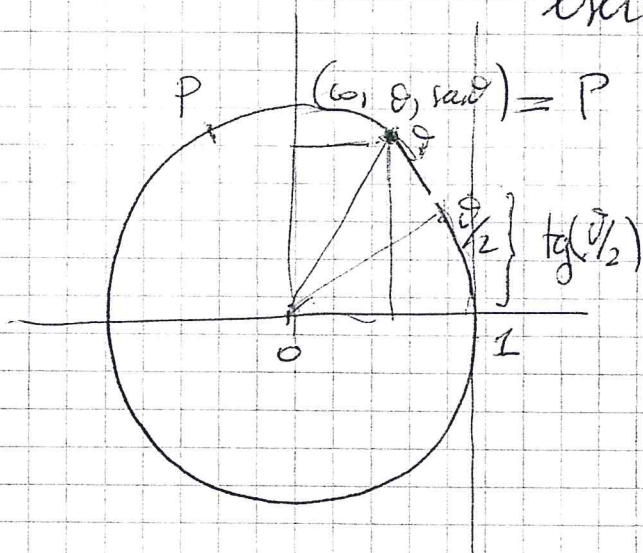
$$= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

$$\sin \vartheta = \sin\left(2 \frac{\vartheta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\cos \vartheta = \cos\left(2 \frac{\vartheta}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)^2$$

$$\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\sin(\vartheta/2)}{\cos(\vartheta/2)} = t$$

esercizio

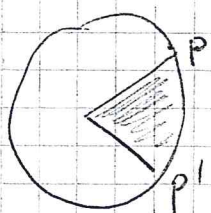


Ripassare le cose

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

ecc.



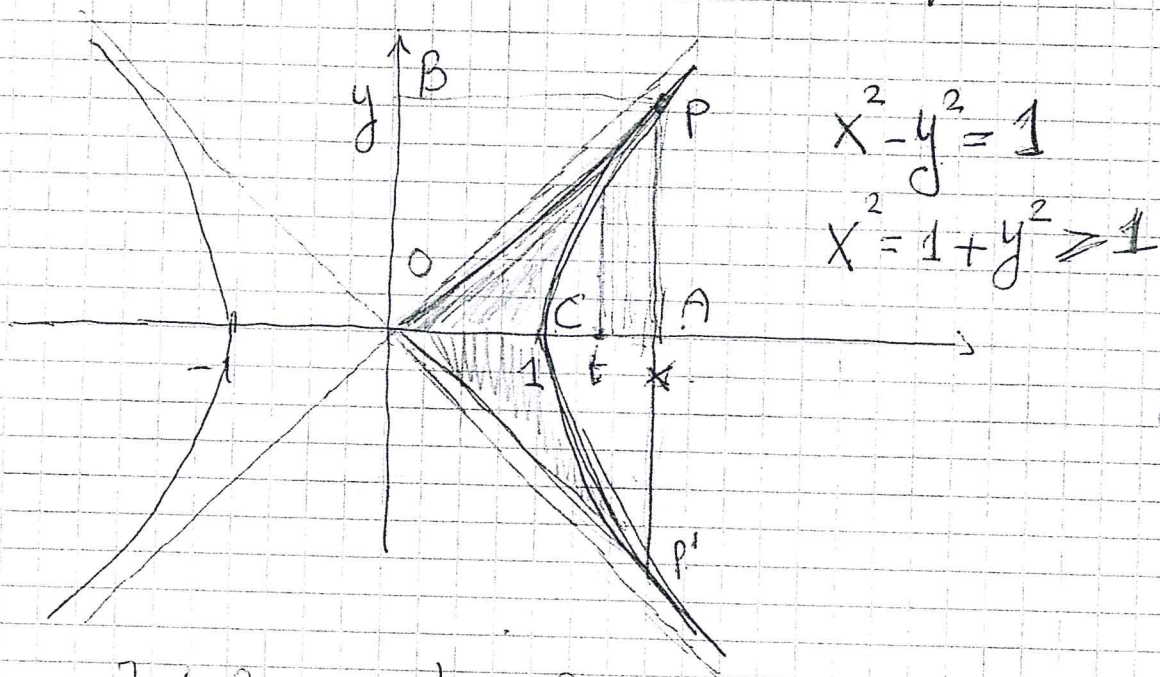
$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \\ y = \sin \vartheta \end{cases}$$

dove $(x, y) = P \in$

cerchio di centro O
e raggio 1

Funzioni circolari iperboliche

Oggetto fondamentale: iperbole equilatera:



$P \in$ iperbole, P' riflesso di P rispetto
a $\{y=0\}$; $P = (x, y) = (x, \sqrt{x^2 - 1})$

Sia $S = \text{area}(\text{regione grigia})$

Cercare un legame tra x e S

e tra y e S

$$xy = \text{area}(\text{rettangolo } OAPB) \\ = \text{area}(\triangle OP'P)$$

$$S = xy - \text{area}(P'PC \text{ triang. curvilineo}) =$$

SERVIREBBE
CALCOLARE

$$2 \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$\log$ è logaritmo in base e

DATO PER BUONO

(notaare questo collegamento tra $\log$ e iperbole)

$$\Rightarrow S = \dots; \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{Ma}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{perch\`e } (x, y) \in \text{iperbole} \cap 1^{\circ} \text{quad.}$$

$$S = \dots; \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

legame tra x e S . Voglio semplificarlo!

$$X + y = x + \sqrt{x^2 - 1} = e^S$$

Mi domanda se $x - y = e^{-S}$, che segue considerando la parte di sotto

$$\begin{cases} x + y = e^S \\ x - y = e^{-S} \end{cases} \xRightarrow{\text{Sommando le 2 eq}} 2x = e^S + e^{-S}$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^S + e^{-S}}{2}$$

Tuttavia, facendo la differenza delle 2 eq:

$$2y = e^S - e^{-S} \Rightarrow y = \frac{e^S - e^{-S}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{e^S + e^{-S}}{2} =: \cosh S \\ y = \frac{e^S - e^{-S}}{2} =: \sinh S \end{cases}$$

$\sinh, \cosh, \sinh s, \cosh s$ sono collegati tra loro nello studio delle funzioni di una variabile complessa, attraverso

$$\sinh z, \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Def P2.10.1 $\forall s \in \mathbb{R}$

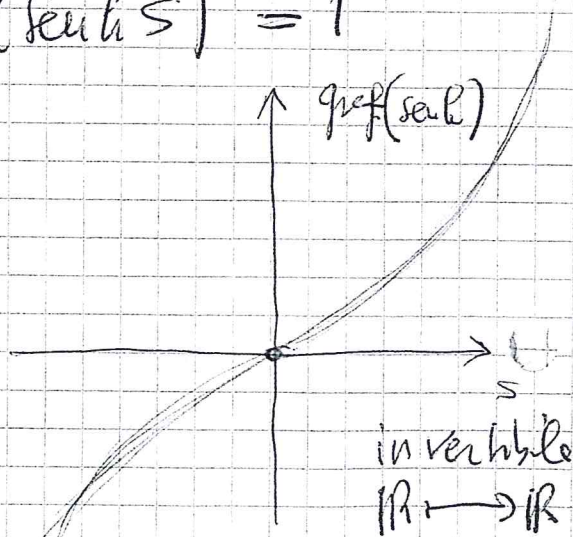
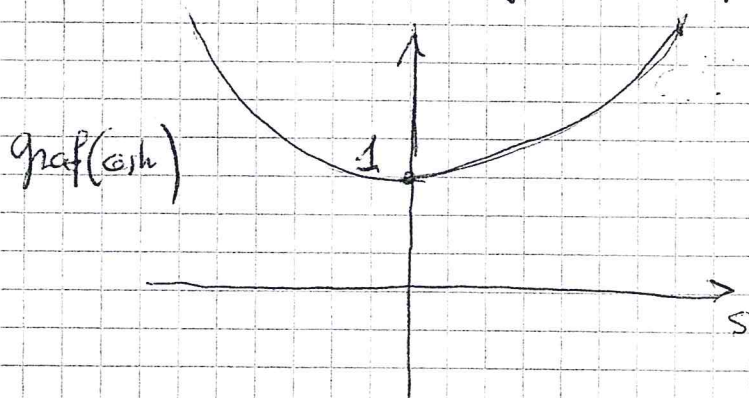
$$\tanh s = \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}$$

Notare $\cosh s \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$, dunque

$$\text{dom}(\tanh) = \mathbb{R}$$

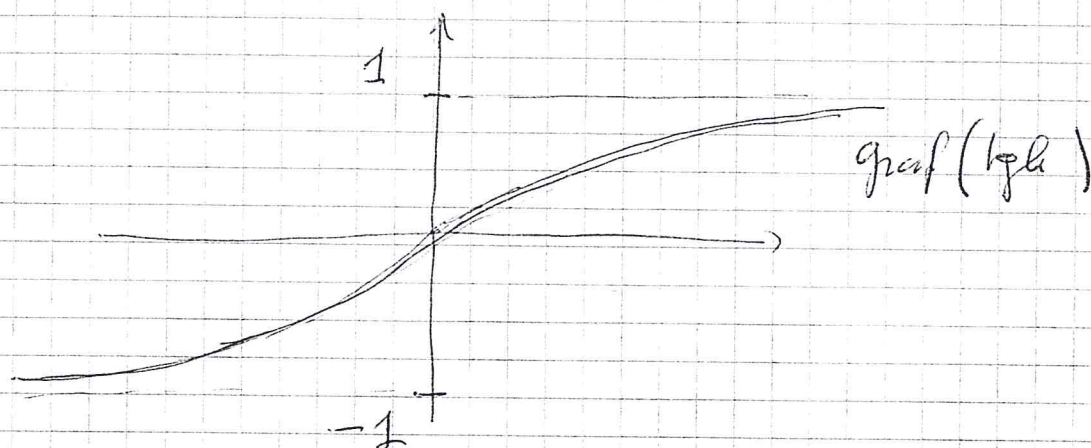
ES (per casa) dim. che $\cosh$ è pari e il $\sinh$ è dispari e che $\tanh$ è dispari

Dim. che $(\cosh s)^2 - (\sinh s)^2 = 1$



$\forall s \in \mathbb{R}$ si ha

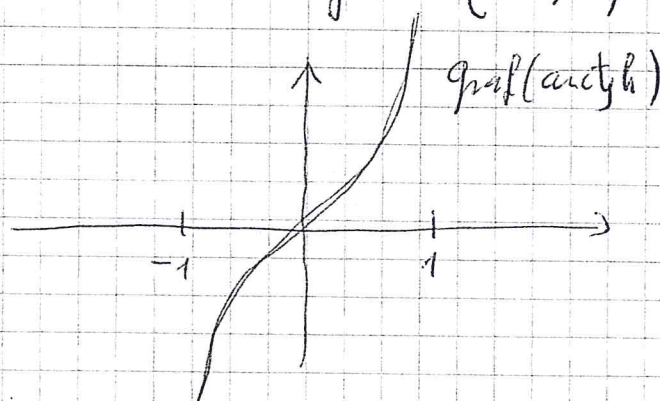
$$\tanh s = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \frac{e^s (1 - e^{-2s})}{e^s (1 + e^{-2s})} = \frac{1 - e^{-2s}}{1 + e^{-2s}}$$



Daunque $|\tanh(s)| < 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ è invertibile,

la sua inversa $\operatorname{arctgh} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$

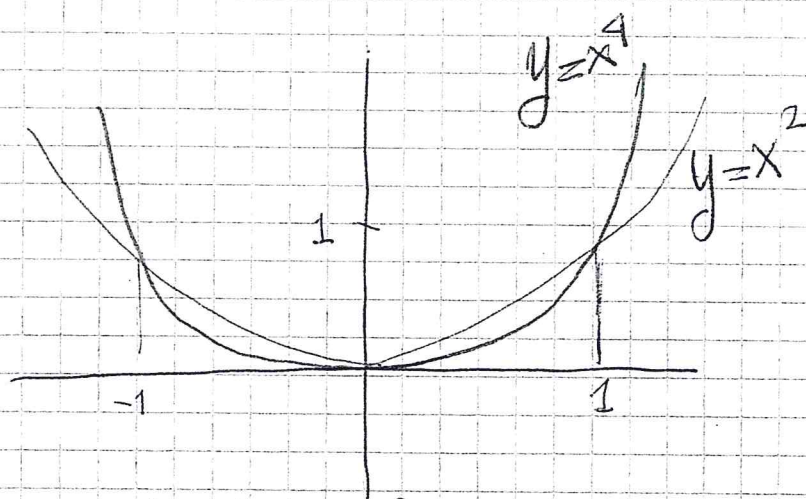
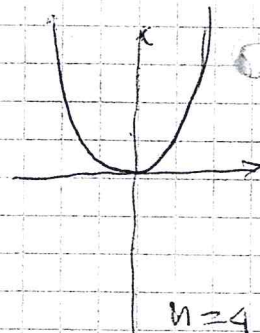
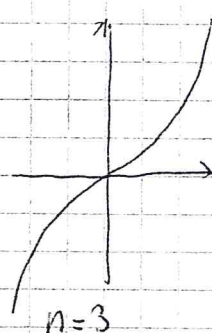
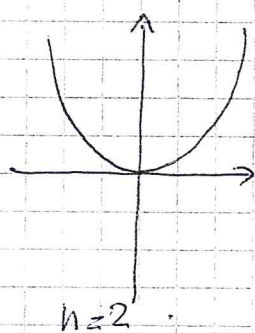
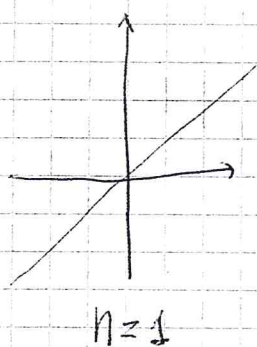


Qualche richiamo sulle funzioni
esponenziali.

Def P2.12.1

Sia $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Senza lo zero

Poss. definire $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$



Vorrei invertire f ; per $n=2, 4$ non è
invertibile (nota: per n dispari f è invertibile)

Prendo $D := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e considero

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

(uso lo stesso simbolo per semplicità di notazione)

• OSS f è strettamente crescente (vedi

Def 2.5.1 con $I = D$). Dimostriamo

infatti che si ha: $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n, \text{ cioè}$$

$$0 \leq x_1, x_2, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$$

osserviamo un fatto algebrico:

$$x_2^n - x_1^n = x_2^n \left(1 - \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n \right)$$

$\uparrow$
 $x_2 > 0$

$$= x_2^n (1 - q^n) \quad \text{con } q = x_1/x_2$$

$$= x_2^n (1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1})$$

Devo dim. che $x_2^n - x_1^n > 0$, cioè che

$$x_2^n (1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1}) > 0. \text{ Ma}$$

$$x_2^n > 0 \quad \text{perché } x_2 > 0 \quad (\text{dato che } x_2 > x_1 \geq 0);$$

$$0 \leq q < 1 \Rightarrow 1 - q > 0; \quad \text{infine}$$

$$1 + q + \dots + q^{n-1} \geq 1 + 0 + \dots + 0 = 1 > 0$$

Si conclude che

$x_2^n - x_1^n$ è prodotto di tre termini ciascuno dei quali è positivo, dunque

$$x_2^n - x_1^n > 0.$$

Dunque f manda $(0, +\infty)$ in $(0, +\infty)$

$0 \in \text{Im}(f)$ perché $f(0) = 0^n = 0$
(è l'unico punto che ha per immagine
 0 e 0 stesso).

$$f: D = [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

Inoltre f è iniettiva, per che
strettamente crescente (come osservato
prima).

Nota che $\text{Im}(f)$ contiene ^{certi} $\forall$ numeri
reali arbitrariamente grandi, perché contiene
 a^n con $a \in \mathbb{N}$

Si può dimostrare che

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

f definita

$$f: D \longrightarrow D, \quad f(x) = x^n$$

f iniettiva e suriettiva.

Dunque f è invertibile,

$$g := f^{-1}: D \longrightarrow D$$

$$g(y) \text{ viene indicata con } y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$$

$$\forall y \in D$$

Esercizio P2.15.1 Se $n, m \in \mathbb{N}$
(a) (b) (c)

$$y^{\frac{1}{n \cdot m}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Nota $n \cdot m \in \mathbb{N}$, dunque $y^{\frac{1}{n \cdot m}}$ è ben definito; inoltre $y^{\frac{1}{n}}$ è ben definito, è un elemento di D , dunque $\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$ è ben

Sia $q \in \mathbb{Q} = \left\{ p \in \mathbb{R} : p = \frac{k}{h}, \right.$
 $\left. \text{para qualda } k \in \mathbb{Z}, \text{ para qualda } h \in \mathbb{N} \right\}$

$$= \left\{ p \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}, \exists h \in \mathbb{N} : p = \frac{k}{h} \right\}$$

Sia $a > 0$; definisco, se $q = \frac{m}{n}$,

$$a^q = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m$$

Problema: $q = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Com questo

$$\text{def } a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}} ?$$

Coẽ, a^q non deve dipendere da
 come rappresento q . Per caso