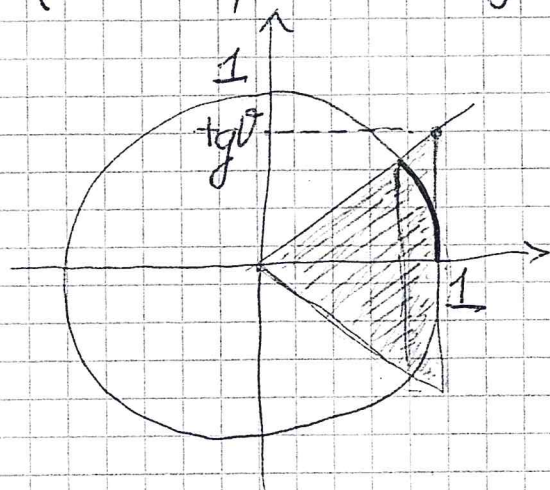


14/9/2018

Lezione 2

9-13

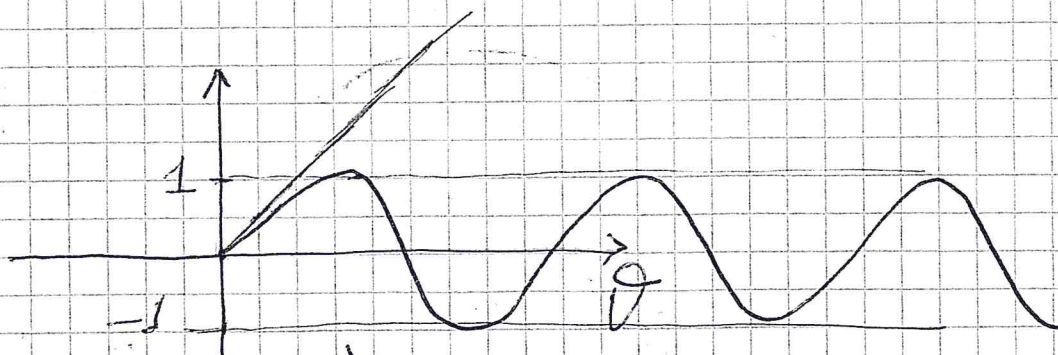
15

ESERCIZIO (OSS. 1.14.1) $\theta < \frac{\pi}{2}$ $\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 

$\tan \theta = 1 \cdot \tan \theta = \text{area rettangolo di base 1}$
 e altezza $\tan \theta = \text{area} \triangle > \text{area}$

settore circolare $\triangle = \theta$

ES 1.14.1

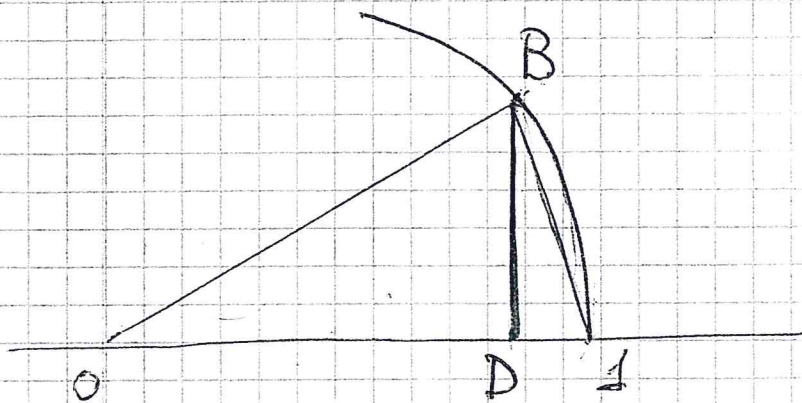
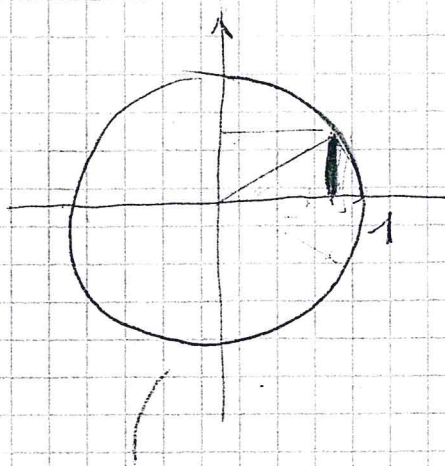
 $\sin \theta < \theta \quad \forall \theta > 0$ 

$(\sin \theta = \theta \quad \mu \theta = 0)$

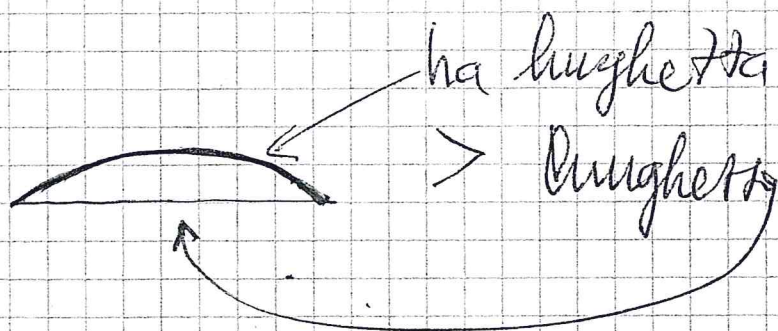
Se $\theta > 1$ evident. $\theta > 1 \geq \sin \theta$

(meno forte se $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ $\sin \theta < \theta$)

Se $\vartheta \in (0, \pi/2)$

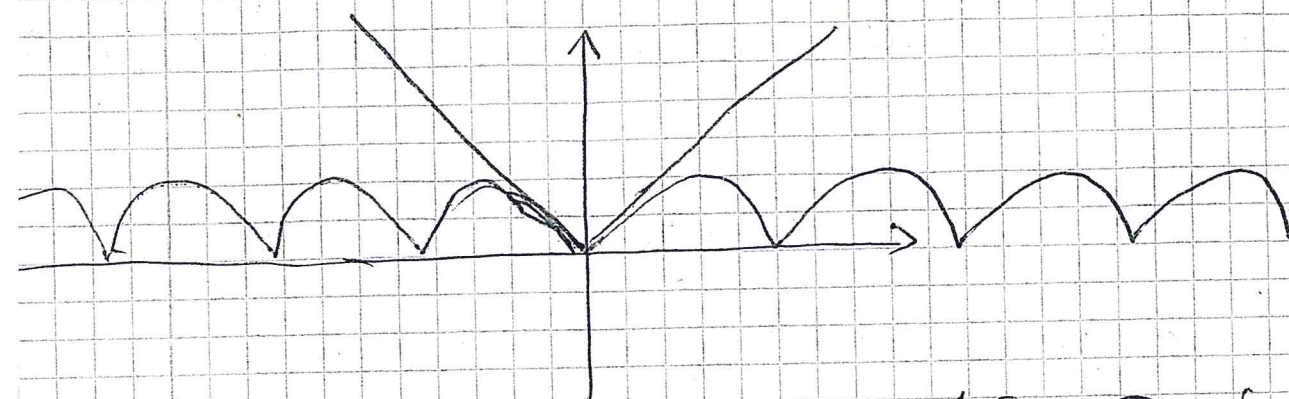


$$\text{length}(BD) < \text{length}(B1) < \vartheta$$



$$\Rightarrow \sin \vartheta < \vartheta \quad \forall \vartheta \in (0, \pi/2)$$

$$\Rightarrow \sin \vartheta < \vartheta \quad \forall \vartheta > 0.$$



$$|\sin \theta| < |\theta| \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è a questo punto evidente.

Infine

$$\text{ES 2.3.1} \quad 1 - \cos \theta < \theta \quad \forall \theta \in (0, \pi/2)$$

$$\text{ES 2.3.2} \quad \text{Se } t = \tan(\theta/2) \text{ allora}$$

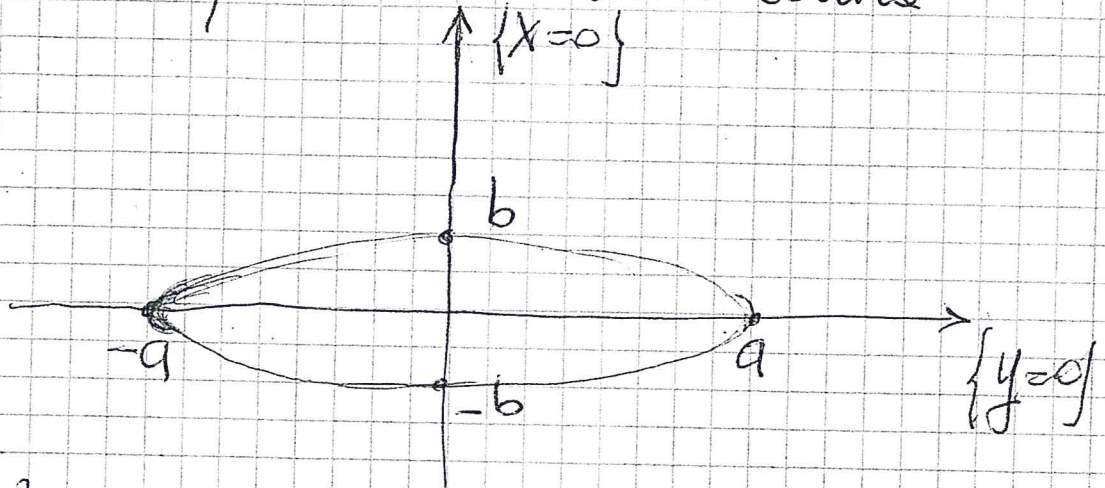
$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(risulterà utile per il calcolo di alcuni integrali)

Qualcosa sulle funzioni circolari iperboliche⁴

Consideriamo $x^2 - y^2 = 1$ curva (algebraica)
nel piano, anch'è una conica

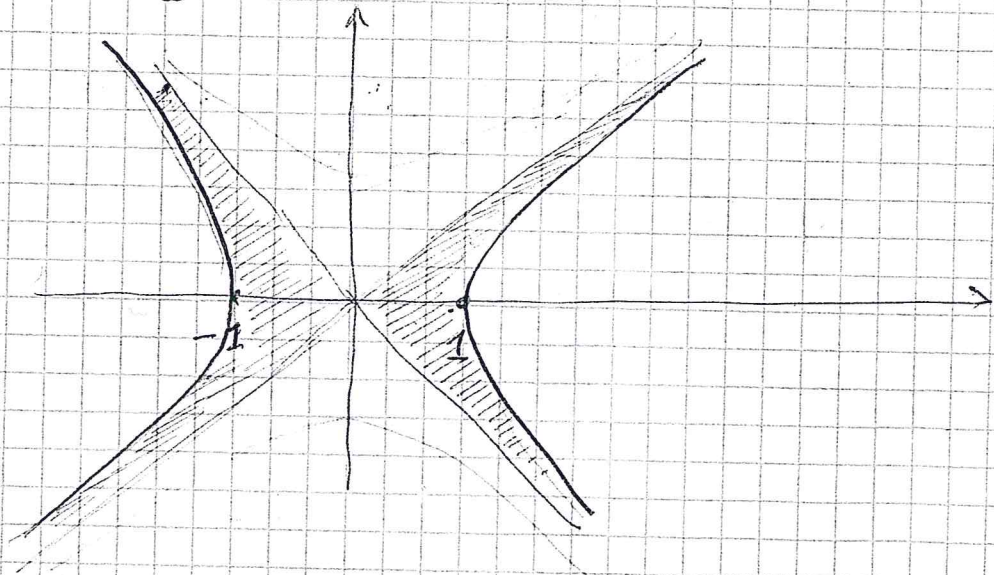


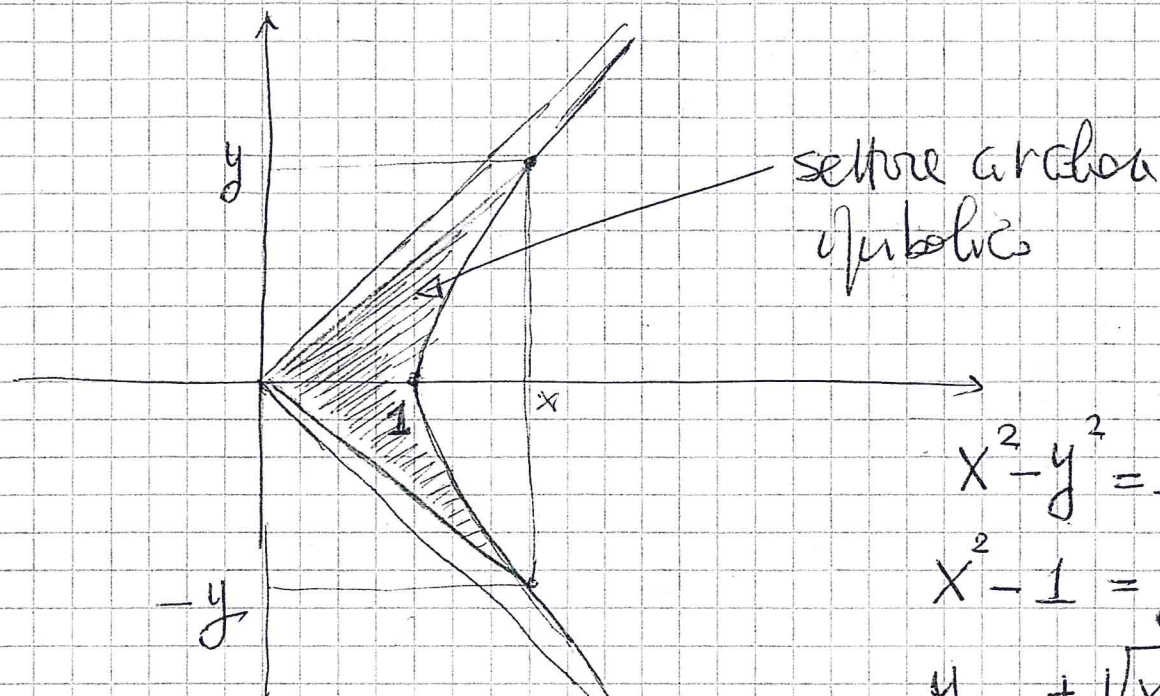
$x^2 + y^2 = 1$ cerchio di raggio 1 centrato
in $(0,0)$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{per } y=0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

$$x=0 \Rightarrow y = \pm b$$





$$x^2 - y^2 = 1$$

$$X^2 - 1 = y^2$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{area}(\text{zona verde}) = S;$$

? cerco legame tra x e S , e tra y e S

$$S = xy - \text{area}(\text{I}) = \quad (2.3.1)$$

$$\stackrel{=}{\uparrow} \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

nel corso

chi non sa cosa è log attenda qualche ora. Se x e y sono come in figura

$$X + Y = X + \sqrt{X^2 - 1} \stackrel{(2.5.1)}{=} e^S$$

$$x-y = x - \sqrt{x^2 - 1} = e^{-s}$$

$$\begin{cases} x+y = e^s \\ x-y = e^{-s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{e^s + e^{-s}}{2} & (\text{sommando le 2 eq}) \\ y = \frac{e^s - e^{-s}}{2} & (\text{sottraendo le 2 eq}) \end{cases}$$

Def 2.6.1 $f(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2} \quad \forall s \in \mathbb{R}$

si chiama coseno iperbolico di s

$$g(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

si chiama seno iperbolico di s

$$f(s) = \cosh(s), \quad g(s) = \sinh(s)$$

Def 2.6.2 $\tanh(s) := \frac{\sinh(s)}{\cosh(s)} \quad \forall s \in \mathbb{R}$

Es 2.6.1 $\forall s \in \mathbb{R} \quad (\cosh(s))^2 - (\sinh(s))^2 = 1$

che è l'analogo della (12.1).

7

$\sinh(s)$ e $\cosh(s)$ non sono
periodiche (al contrario di $\sin^{\theta}, \cos^{\theta}$)
ma una analogia rimane:

$$\cosh(s) = \cosh(-s) \quad \text{è pari (come } \cos^{\theta})$$

$$\sinh(s) = -\sinh(-s) \quad \text{è dispari (come } \sin^{\theta})$$

ES 2.7.1 (per chi conosce già esponenziale

e logaritmo): fare un grafico

approssimativo di

$$\mathbb{R} \ni s \rightarrow \cosh(s)$$

$$\mathbb{R} \ni s \rightarrow \sinh(s)$$

$$s \in \mathbb{R} \mapsto \tanh(s)$$

($\text{dom}(\tanh) = \mathbb{R}$, a differenza
di $\text{dom}(\tanh)$)

ESPOENZIALI E LOGARITMI

8

Sia $n \in \mathbb{N}$ naturale fissato ≥ 1
e consideriamo x^n . La funzione

$$x \mapsto x^n$$

è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

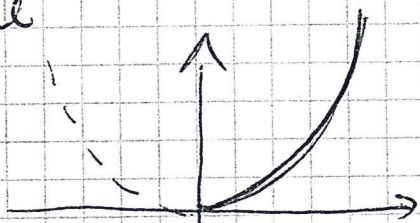
Cominciamo con considerare la
restrizione di questa funzione

$$\text{a } \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = E = [0, +\infty)$$

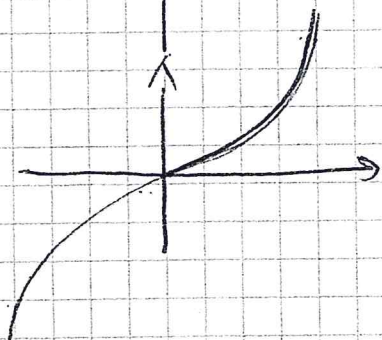
$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^n$$

Lemma 2.8.1 f è strettamente
crescente

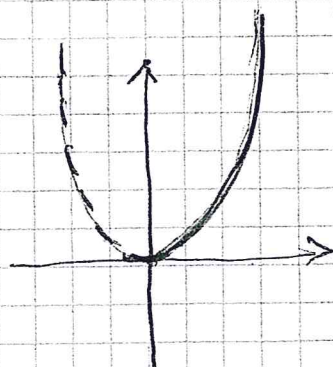
$n=2$



$n=3$



$n=4$



Dim. devo dim. che

9

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$$

S. hq

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

dalla OSS. 2.9.1. Ma

$$x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1} > 0 \quad \begin{matrix} (\text{perch\u00e9 } x_1 \geq 0 \\ \text{e } x_2 \geq 0) \end{matrix}$$

inoltre l'ipotesi $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

Dunque $x_2^n - x_1^n$ \u00e9 prodotto di 2 numeri positivi. Pertanto

$$x_2^n - x_1^n > 0 \Leftrightarrow x_1^n < x_2^n$$

□

OSS 2.9.1 $1 - z^n = (1 - z)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$

Infatti il membro destro \u00e9

$$\cancel{z^{n-1}} + \cancel{z^{n-2}} + \dots + \cancel{z} + 1 = (z^n + \cancel{z^{n-1}} + \dots + \cancel{z^2} + \cancel{z})$$

$$\text{che \u00e9 } = 1 - z^n$$

$$x_2^n - x_1^n = x_2^n \left(1 - \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n \right) \quad \text{Chiamo } z = \frac{x_1}{x_2}$$

(nota: $x_2 > 0$, in particolare $x_2 \neq 0$)

$$X_2^n - X_1^n = X_2^n \left(1 - \frac{X_1}{X_2} \right) \left(\left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{n-1} + \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{n-2} + \dots + \frac{X_1}{X_2} + 1 \right)$$

$$= X_2^{n-1} (X_2 - X_1) \left(\left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{n-1} + \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{n-2} + \dots + \frac{X_1}{X_2} + 1 \right)$$

(sostituendo $X_2^n = X_2^{n-1} \cdot X_2$)

$$= (X_2 - X_1) X_2^{n-1} \left(\left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{n-1} + \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{n-2} + \dots + \frac{X_1}{X_2} + 1 \right)$$

$$= (X_2 - X_1) \left(X_1^{n-1} + X_2 X_1^{n-2} + X_2^2 X_1^{n-3} + \dots + X_2^{n-2} X_1 + X_2^{n-1} \right)$$

oss 2.10.1 $\text{Im}(f) \ni 0$

Poiché $0 \in \text{dom}(f) = E$, $f(0) = 0$

Inoltre $\text{Im}(f) \ni$ numeri maggiori di qualunque $J \in \mathbb{N}$. Infatti

$$J \in \text{dom}(f), \quad f(J) = J^n > J$$

Infine $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$. Questo è conseguenza di proprietà che vedremo nel corso.

In definitiva, f manda E in se stesso, ed è strettamente crescente.
 f è dunque INIETTIVA E SURGETTIVA
 e perciò è invertibile. Chiamiamo

$g: E \rightarrow E$ l'inversa di f

La indicheremo anche così:

$$g(y) = y^{\frac{1}{n}} = g_n(y)$$

ES 2.11.1 Se $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$

Si ha

$$(2.11.1) \quad y^{\frac{1}{nm}} = \left(y^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \forall y \in E.$$

Dim chiamiamo $f_n(x) = x^n$

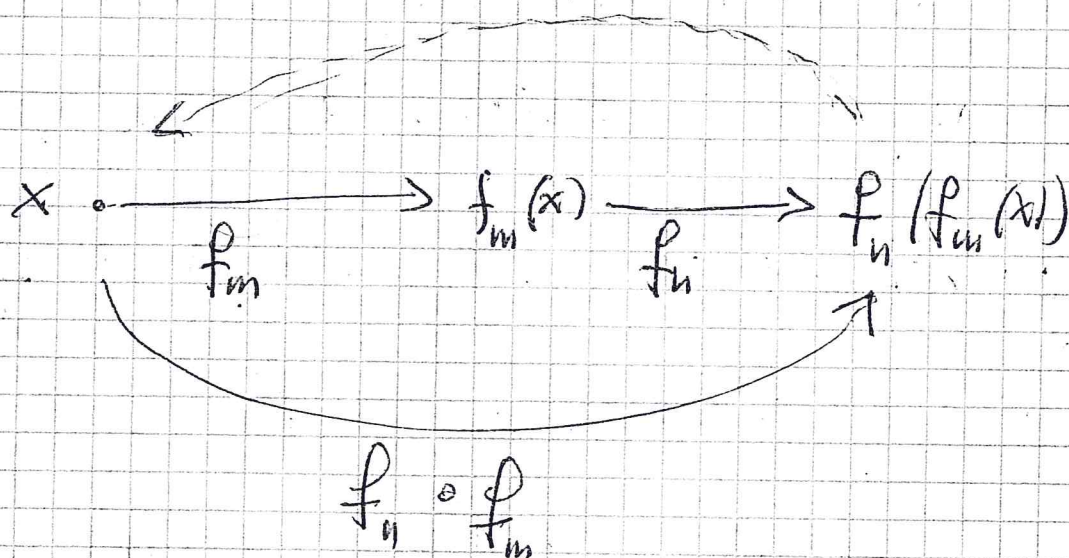
in modo da indicare anche la dipendenza da n nella funzione f . Chi è

$$\begin{aligned} \left(y^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}} &= g_m \left(y^{\frac{1}{n}} \right) = g_m \left(g_n(y) \right) \\ &= f_m^{-1} \left(f_n^{-1}(y) \right) = f_m^{-1} \circ f_n^{-1}(y) \end{aligned}$$

Si ha

12

$$f_m^{-1} \circ f_n^{-1} = (f_n \circ f_m)^{-1}$$



(controllare!), Otteniamo dunque

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = f_m^{-1} \circ f_n^{-1}(y)$$

$$= (f_n \circ f_m)^{-1}(y)$$

$$f_n \circ f_m(x) = f_n(x^m) = x^{nm}$$

e dunque $(f_n \circ f_m)^{-1}(y) = y^{\frac{1}{nm}}$
in definizione. $\square$

Oss 2.13.1 Se $n \geq 1$ è dispari si ha 13

$$f_n(-x) = -f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(-x)^n = (-1)^n x^n = -x^n$$

dunque f_n è (definita in $\mathbb{R}$) dispari,

Vogliamo adesso definire a^q (uso a al posto di x per la scrittura $a^{\frac{1}{n}}$ e moltiplichi q "diventerà" x)

dove $a \in \mathbb{R}$ cioè $a > 0$

e $q \in \mathbb{Q}$. Dunque q si può scrivere come

$$q = \frac{m}{n}$$

con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

(non in modo unico)

Definizione 2.13.1 $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$

È una buona definizione?

Per vedere che a^q è ben definito, devo dimostrare che se

$$q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

$$\text{con } n, n' \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$m, m' \in \mathbb{Z}$$

allora

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} \quad (2.14.1)$$

Nota $mn' = m'n$

Per dimostrare la (2.14.1) introduciamo

$$b := a^{\frac{1}{nn'}} \quad (\text{ben definito})$$

Cerco di esprimere b nella (2.14.1)

$$a^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{nn'}}\right)^{n'} = b^{n'}$$

$$\text{fatti } a^{\frac{1}{nn'}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{dalla (2.11.1)}$$

$$a^{\frac{1}{n'}} = \left(a^{\frac{1}{nn'}}\right)^n = b^n$$

Deduco

13

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(b^{n'}\right)^m = b^{n'm}$$

e anche

$$\left(a^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} = \left(b^n\right)^{m'} = b^{nm'}$$

Dalla Nota alla pagina precedente

deduco $b^{n'm} = b^{m'n'}$, che conclude
la dim. delle (2.16.1).

Valgono per a^q le stesse proprietà che
valgono per l'elevamento a un esponente intero

$$i) \quad a^{q+q'} = a^q a^{q'}$$

$$ii) \quad (a^q)^{q'} = a^{qq'}$$

$$iii) \quad (a \cdot c)^q = a^q c^q$$

$$iv) \quad a^{-q} = \frac{1}{a^q} = (a^q)^{-1}$$

dove $a, c \in (0, +\infty)$, $q, q' \in \mathbb{R}$

Dimostriamo la i), le altre sono per caso.

$$a^q a^{q'} = a^{q+q'}$$

Scrivo $q = \frac{m}{n}, \quad q' = \frac{m'}{n}$

con $n \in \mathbb{N}, \quad q, q' \in \mathbb{Z}$ opportuni.

(usando il minimo comune multiplo...)

$$a^q a^{q'} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m'} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m+m'}$$

(2.11.1)

$$= a^{\frac{m+m'}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{m'}{n}} = a^{q+q'}$$

(2.12.1)

□

Infine vogliamo definire a^x con $a > 0$ reale, e $x \in \mathbb{R}$. Questo è il passaggio più difficile.

17

Prop. 2.17.1. Supponiamo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

Allora la funzione

$$z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \frac{a^z - 1}{z} =: h(z)$$

è strettamente crescente.

↳ vedi pag 6 lezione 1

Dim Cominciamo con dim. ch

$$0 < z_1 < z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$\Downarrow$

$$h(z_1) < h(z_2)$$

Per vedere questo, basta dim. ch

$$h(n) < h(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cioè

$$\frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^{n+1} - 1}{n+1}$$

Cioè

$$(n+1)(a^n - 1) < n(a^{n+1} - 1)$$

$$(n+1)(a^n - 1) < n(a^{n+1} - 1)$$

$$na^{n+1} - n + n + 1 - na^n - a^n > 0$$

$$\begin{aligned} a^n - 1 &< na^{n+1} - na^n \\ &= na^n(a - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} < na^n \quad (a > 1 \text{ per ipotesi})$$

Dalle os. 29.1

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)}{a - 1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 < na^n \quad ?$$

In fatti sono $\nearrow n$ addendi, ciascuno dei quali $\leq a^n$ (perché $a > 1$)