

Precozz lez 1

4/9/19

9-13

1

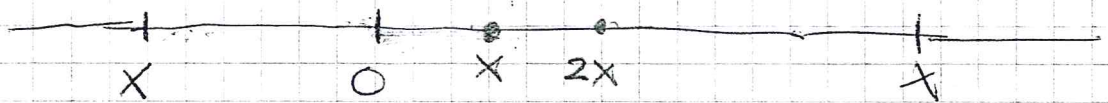
Funzione valore assoluto di $x \in \mathbb{R}$:

Def P1.1.1 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| := \text{dist}(x, 0) \geq 0$$

$$(P1.1.0) = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Posso $f(x) = |x|$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



Oss P1.1.1

• $|x| = 0 \iff x = 0$ (NON DEGENERAZIONE)

• $|\lambda x| = |\lambda| |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
(1-OMOGENITÀ)

• In particolare $\lambda = -1$ si ha

$$|-x| = |x| \quad (1.1 \text{ è PARI})$$

• $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$
(P1.1.1) (SUBADDITIVITÀ)

• Osservo che la disuguaglianza $|z| \leq c$ (con $z \in \mathbb{R}$ e $c \geq 0$) equivale a: $-c \leq z \leq c$
(P1.1.2)

12

Applicando questa oss., cioè la
(P1.1.2) a (P1.1.1) con la scelta:

$$Z = x + y \quad C = |x| + |y|$$

Si ha che

$$(P1.1.1) \iff -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

che sono sempre verificate. Infatti

$$\begin{aligned} x &\leq |x| \\ y &\leq |y| \end{aligned} \implies x + y \leq |x| + |y|$$

$$\begin{aligned} \text{D'altra parte } x &\geq -|x| \\ y &\geq -|y| \end{aligned} \implies x + y \geq -|x| - |y|$$

Dunque (P1.1.1) è dimostrata.

ES P1.2.1 Dimostrare che

$$\bullet \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

(1-LIPSCHITZIANITÀ)

$$|f(x) - f(y)| \leq 1|x - y|$$

• grazie a (P1.1.2) ciò equivale a dim.

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$|x|-|y| \leq |x-y| \Leftrightarrow |x| \leq |x-y|+|y|$$

che è una tripla:

$$|x| = |x-y+y| \stackrel{(P1.1.1)}{\leq} |x-y|+|y|;$$

e inoltre

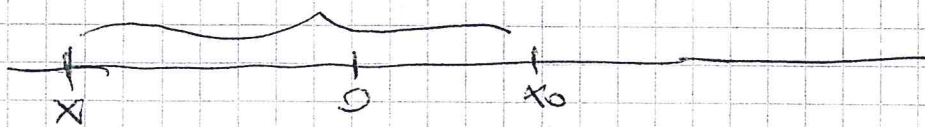
$$-|x-y| \leq |x|-|y| \Leftrightarrow |y| \leq |x-y|+|x|$$

che è vera (sempre la (P1.1.1))

Def P1.3.1 Date $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|x-x_0| = \text{dist}(x, x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Il caso della Def. P1.1.1 è $x_0 = 0$)



4
Data $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

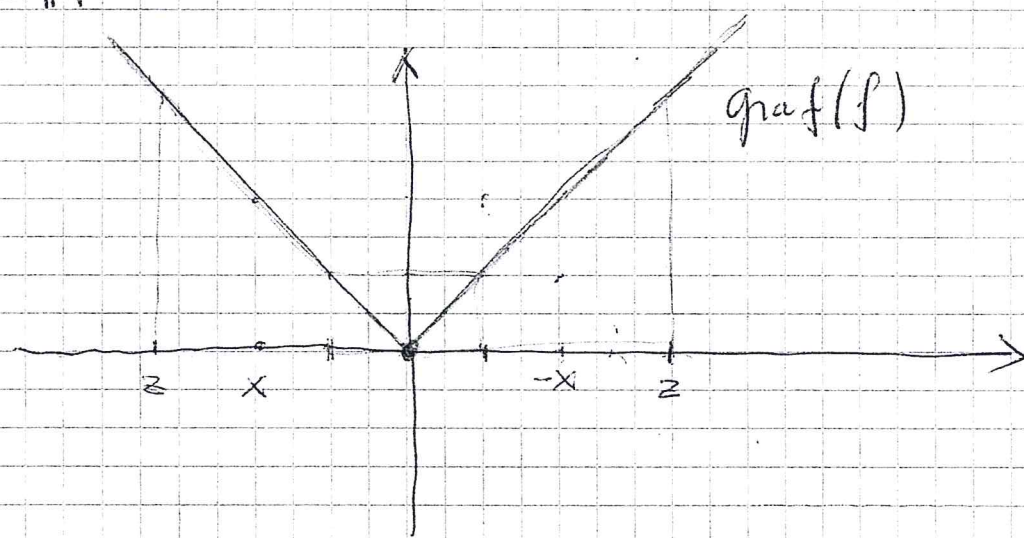
$$\text{graf}(f) := \{ (x, y) \in \text{dom}(f) \times \mathbb{R} : y = f(x) \}$$

La definizione della Coppia ordinata

(x, y) la vedremo, e anche

$\text{dom}(f) \times \mathbb{R} =$ insieme di tutte

le Coppie ordinate (x, y) , con $x \in \text{dom}(f)$
e $y \in \mathbb{R}$



$$\text{graf}(|\cdot|) = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = |x| \}$$

$$f(-x) = f(x)$$

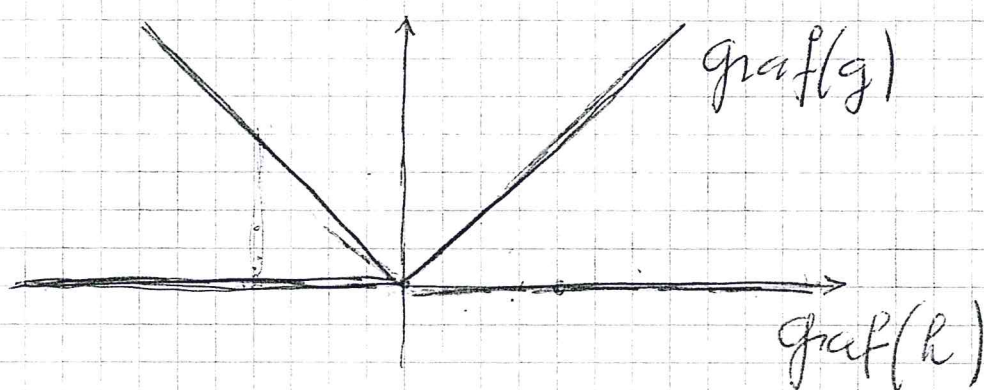
Def 1.5.1 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^+ = \max(x, 0)$$

PARTE POSITIVA di x

$$h(x) = x^- = -\min(x, 0)$$

PARTE NEGATIVA di x



$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) \geq 0$$

Per caso: vedere che $\forall x \in \mathbb{R}$

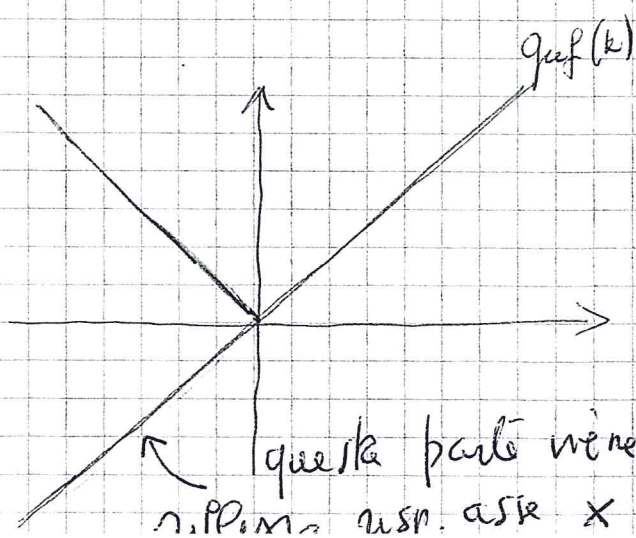
$$|x| = x^+ + x^-$$

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

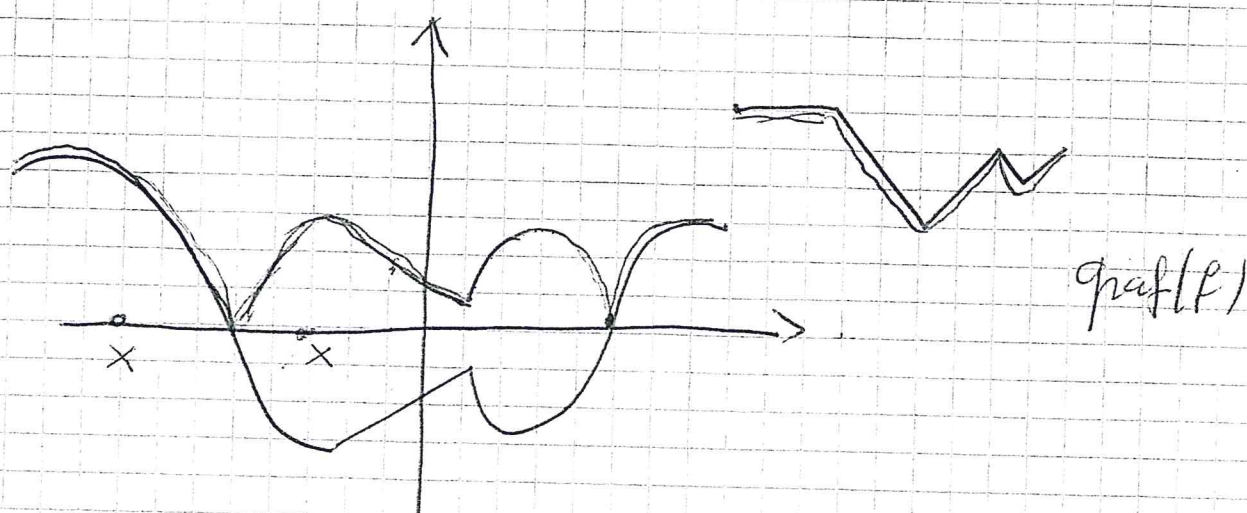
Abbiamo visto $|x|$?

$$k(x) = x$$



Pdii in generale, data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

16



Come disegno $\text{graf}(|f|)$? vedi curva rossa

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

(generalizzazione della (P1.1.0))

ES P1.6.1 Trovare $x \in \mathbb{R}: |x^2 - 10| \leq 2$

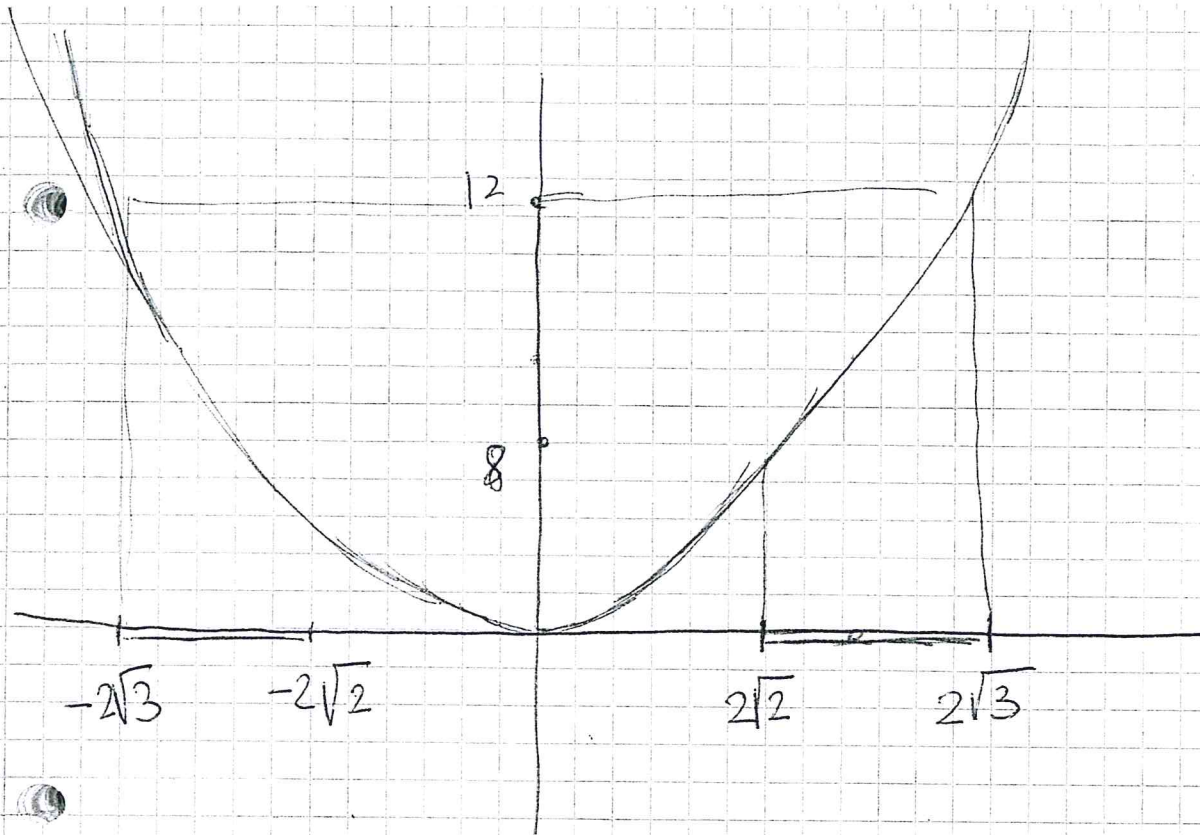
1° modo Usando (P1.1.2) devo risolvere

$$-2 \leq x^2 - 10 \leq 2$$

$$8 \leq x^2 \leq 12$$

$$x^2 \leq 12 \iff |x| \leq \sqrt{12} \stackrel{2\sqrt{3}}{=} \iff -\sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12}$$

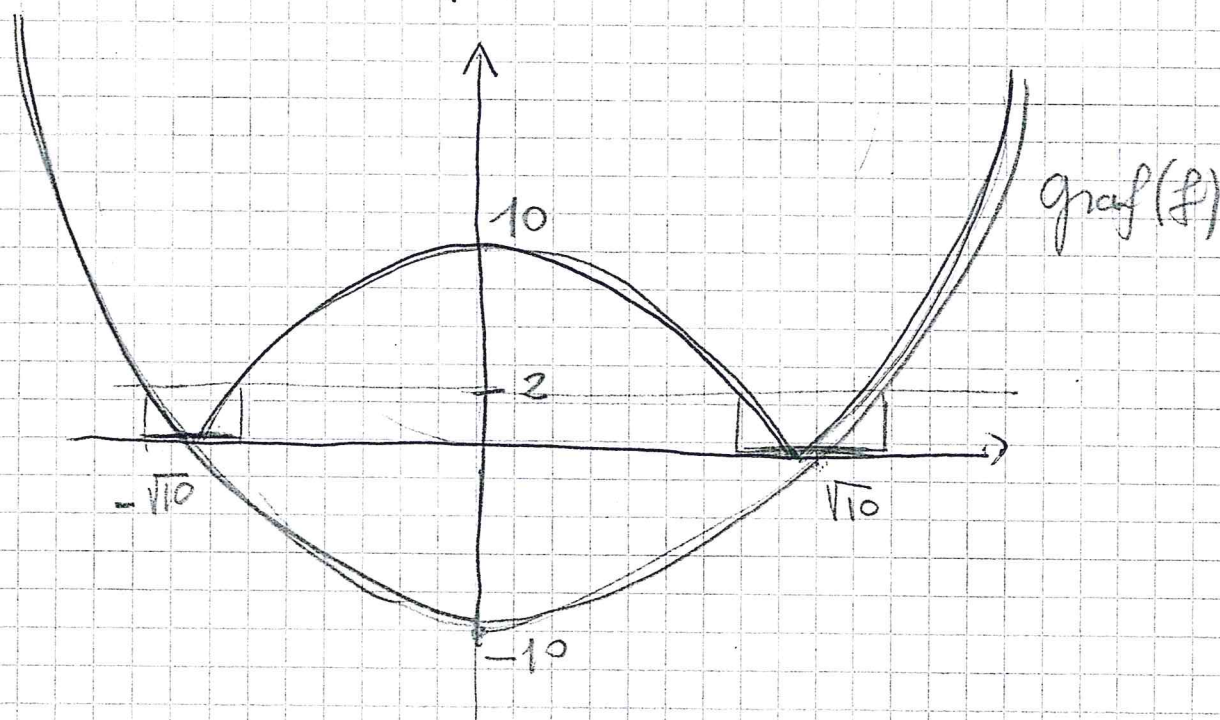
$$x^2 \geq 8 \iff |x| \geq 2\sqrt{2}$$



$$2\sqrt{2} \leq |x| \leq 2\sqrt{3} \quad \text{con i punti in verde}$$

2° modo:

$$f(x) = x^2 - 10 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Richiami su proprietà di disuguaglianze.

Supponiamo che $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Sia $c \in \mathbb{R}$; allora

$$a + c < b + c$$

In qualche caso, possiamo moltiplicare
un numero reale a una disuguaglianza.

Per il prodotto, le cose sono + delicate:

1) sia $c > 0$; $a < b \Leftrightarrow ac < bc$

2) sia $c < 0$; $a < b \Leftrightarrow ac > bc$

(attenzione, in 2) si ~~inverte~~ la disuguaglianza

ESEMPIO Pt. 8.1

Come risolvo in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$\frac{x}{x+3} < x+1$$

Non equivale a risolvere

$$x < (x+3)(x+1)$$

Come faccio?

$$\frac{x}{x+3} - (x+1) < 0$$

$$\frac{x - (x+1)(x+3)}{x+3} < 0,$$

$$\frac{-x^2 - 3x - 3}{x+3} < 0$$

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 3} > 0$$

9

ES 11.9.1 $(x-1)(x-3)(x-4) < 0$ (11.9.1)

I fattori devono essere o tutti e 3 negativi, o due di essi devono essere positivi e il terzo negativo.

$$\overline{x} < 1, \quad \overline{x} < 3, \quad \overline{x} < 4; \text{ cioè } \boxed{x < 1}$$

$$\overline{x} < 1, \quad + \quad \overline{x} > 3, \quad + \quad \overline{x} > 4; \quad \text{No sol}$$

$$+ \quad \overline{x} > 1, \quad + \quad \overline{x} > 3, \quad \overline{x} < 4; \quad \boxed{3 < x < 4}$$

$$+ \quad \overline{x} > 1, \quad - \quad \overline{x} < 3, \quad + \quad \overline{x} > 4 \quad \text{No fl.}$$

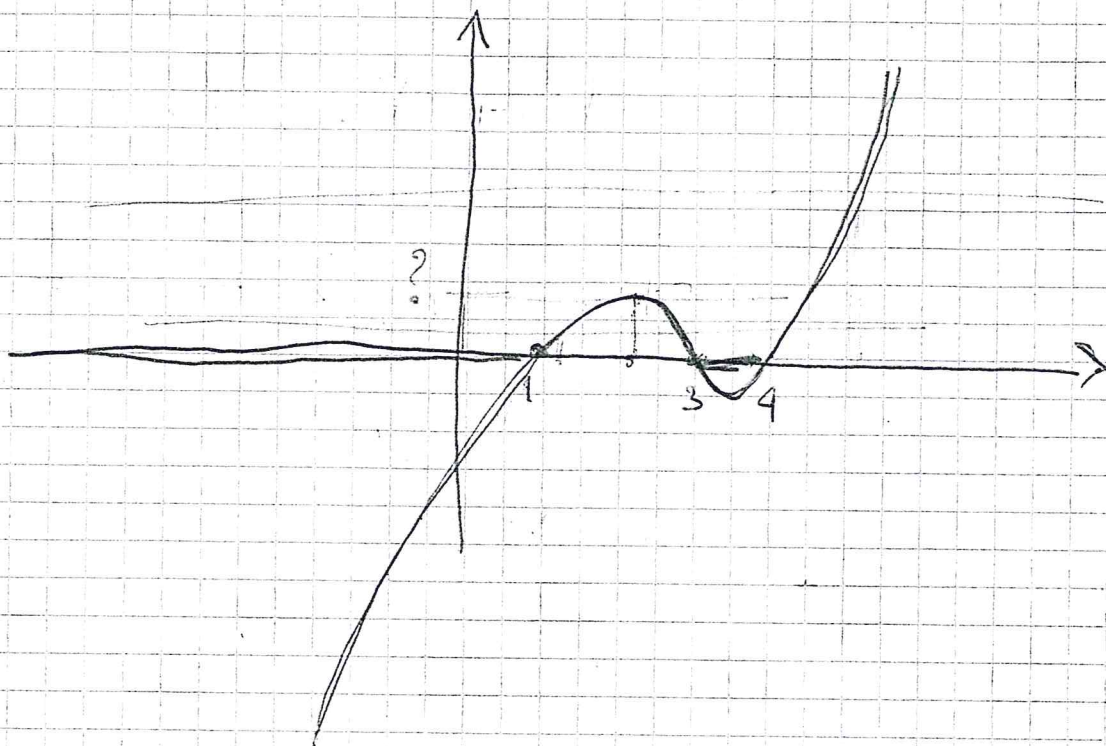
oss 11.9.1 le devo risolvere

$$(x-1)(x-3)(x-4) < 4$$

Non ci sono relazioni tra le soluzioni

e le soluzioni di $x-1 < 4$, $x-3 < 4$, $x-4 < 4$!!

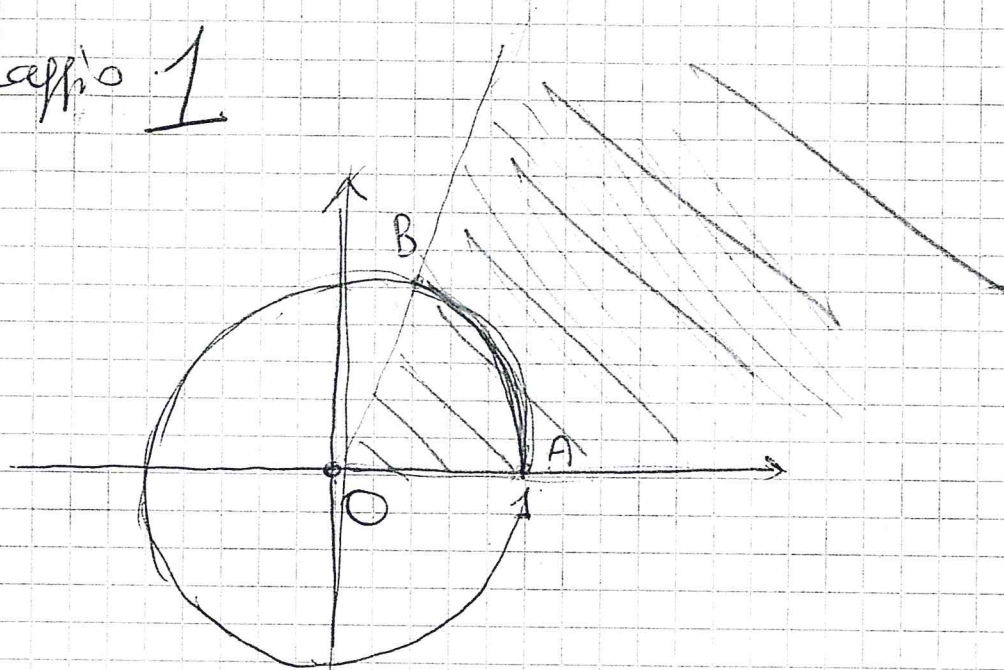
(p1.9.1) $\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 - 19x - 12 < 0$



difficile trovare le radici di
 $x^3 - 8x^2 - 19x - 8$

Qualche richiamo di trigonometria.

Oggetto fondamentale: cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1



$$x^2 + y^2 = 1$$

Cosa è un angolo? regione di piano delimitata

da una semiretta passante in $(0,0)$ e l'arc della x

Cosa è un angolo in radianti? Per definizione, è la lunghezza dell'arco di cerchio (di centro il vertice dell'angolo) di

Chiamiamo $\theta \in [0, 2\pi]$

raggio 1, cioè la lunghezza di AB

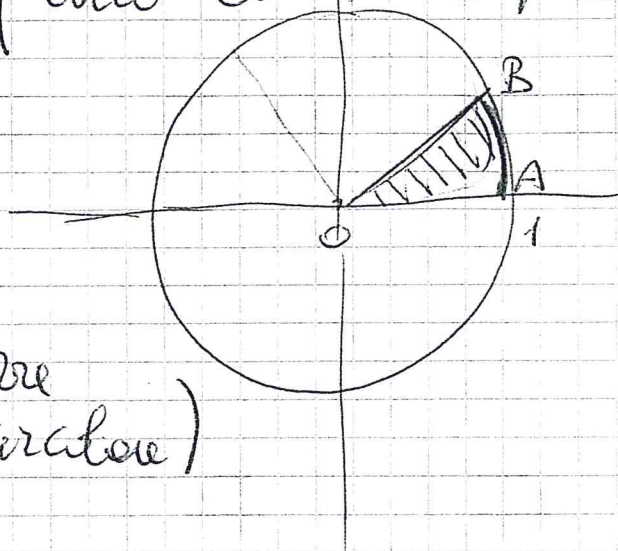
Angolo in gradi a: $\theta = \frac{2\pi}{360} \alpha$

Infine che relazione c'è tra

$\text{length}(\widehat{A,B})$ (arco di circonferenza)

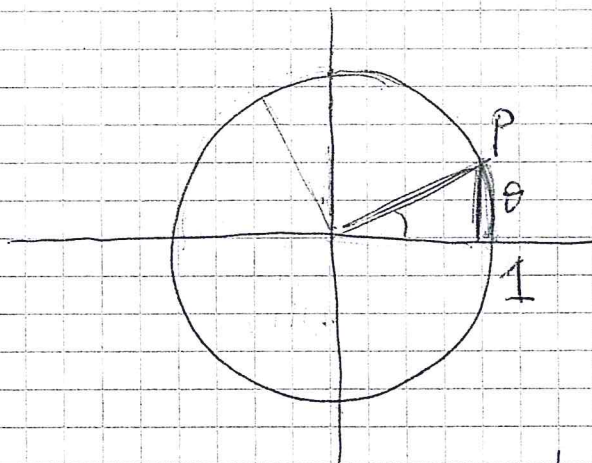
e l'area di

$\widehat{OAB}$? (settore circolare)



$$\text{length}(\widehat{A,B}) = 2 \cdot \text{area}(\widehat{OAB})$$

Def

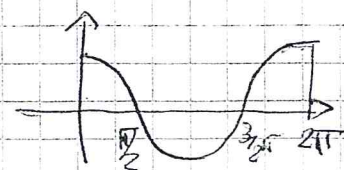
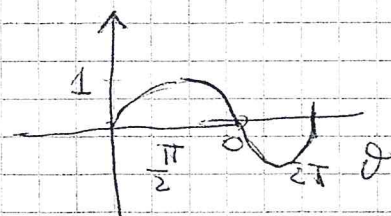


$$\theta \in [0, 2\pi)$$

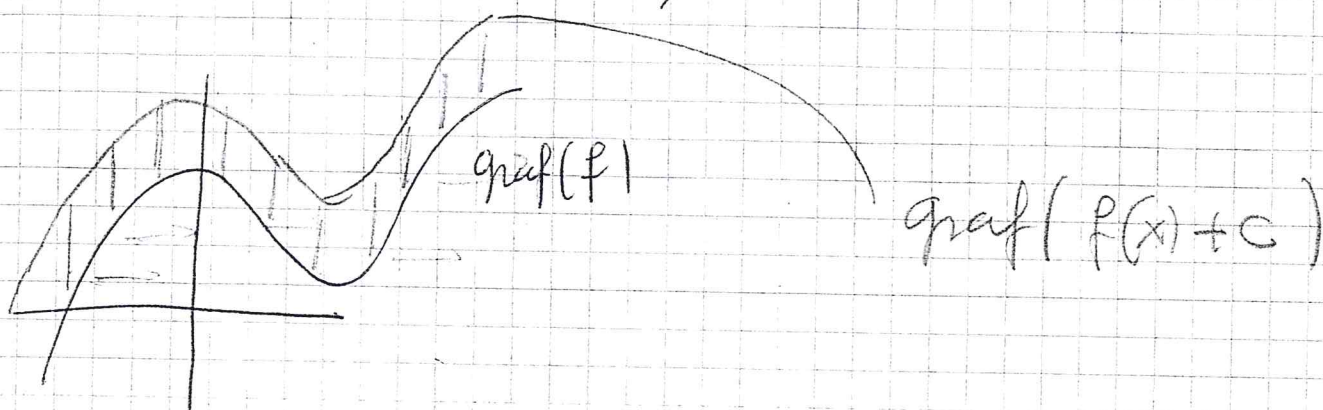
$\sin \theta$ = ordinata di P

$\cos \theta$ = ascissa di P

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad c > 0 \quad \updownarrow c$$



Se traslo verso destra il grafico di f di c , di quale funzione è questo grafico traslato?

$$f(x - c)$$

Consideriamo l'estensione 2π -periodica di $\sin$ e $\cos$ (e li richiamiamo per semplicità $\sin$ e $\cos$)

$$\sin(\vartheta + 2k\pi) = \sin \vartheta$$



$$\cos(\vartheta + 2k\pi) = \cos \vartheta$$

Es $\cos(\theta - \pi/2) = \sin \theta$

14

Es Annahme da $\sin \theta < \theta \quad \forall \theta > 0$

$$|\sin \theta| < |\theta| \quad \forall \theta \neq 0$$

Definiere $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$
 $\cos \theta \neq 0$

also $\forall \theta \neq \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Annahme da $\operatorname{tg} \theta > \theta \quad \forall \theta \in (0, \pi/2)$