

13/9/2018

lezione 1

9-13

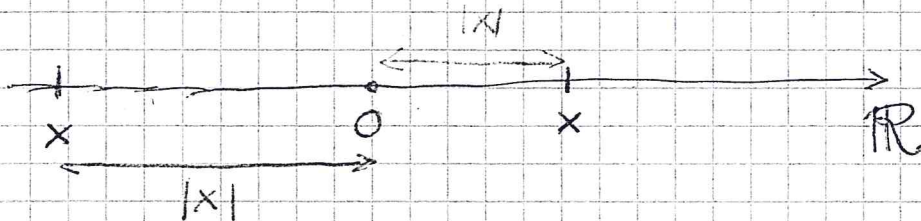
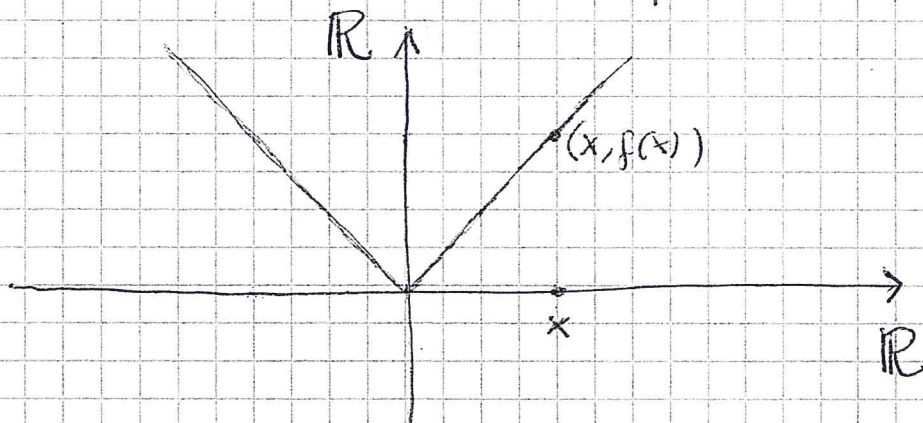
1

Funzione valore assoluto:

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{dist}(x, 0) \geq 0$$

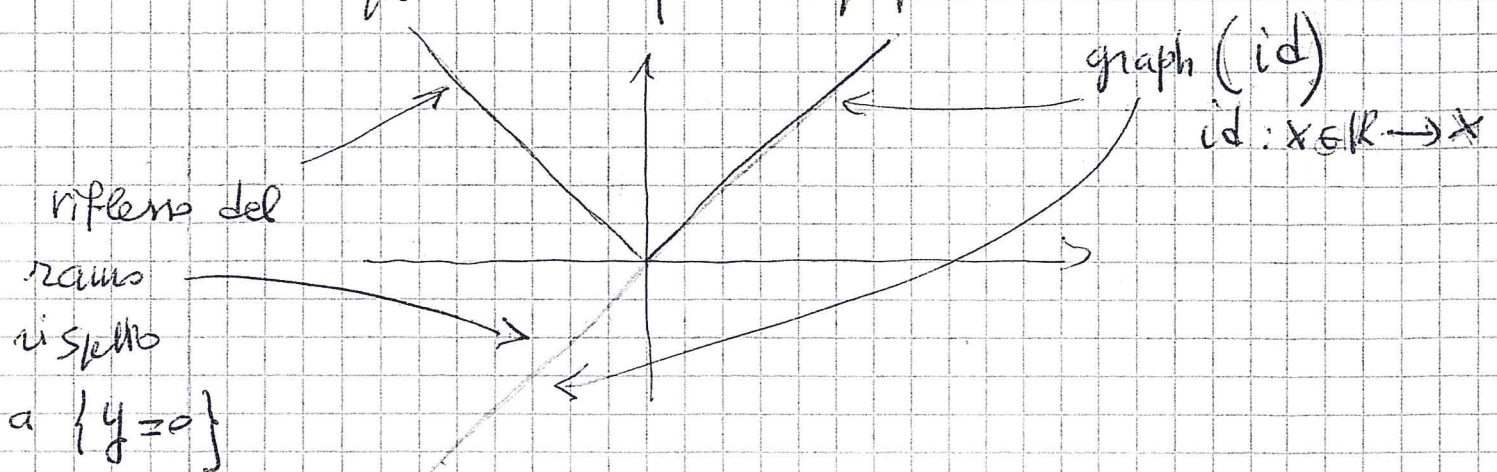
$$\text{Def 1.1.1} \quad |x| := \text{dist}(x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dunque} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ho definito una funzione $f: x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in [0, +\infty)$ 

$$\text{graph}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$

Un modo per ottenere questo grafico è:



Proprietà : $|\lambda x| = |\lambda| |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1 - omogeneità del valore assoluto

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

significa $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

proprietà triangolare del valore assoluto

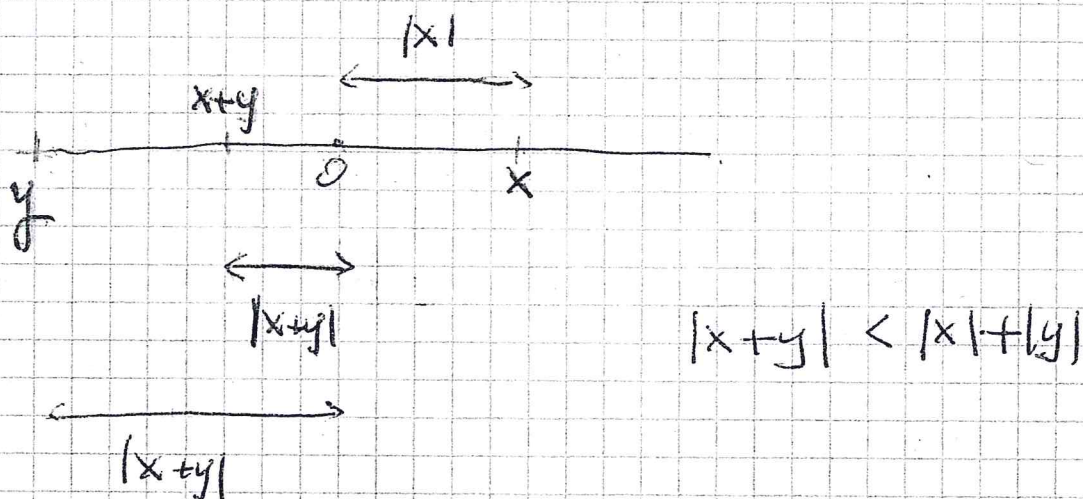
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

non degenerazione del valore assoluto

2551.2.1 $\forall x \in \mathbb{R} \quad |-x| = |x|$ basta prendere $\lambda = -1$

cioè la funzione valore assoluto è pari, $f(x) = f(-x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$.



In generale, se devo andare da un punto a un altro, e mi serve una "tappa" intermedia (cioè passo da un terzo punto), la distanza non diminuisce (potrebbe aumentare).

ES 1.3.1

Quali sono i casi in cui vale $=$ in (2.1)? ³

Quando x e y hanno lo stesso segno.

(o entrambi nonnegativi o entrambi nonpositivi)

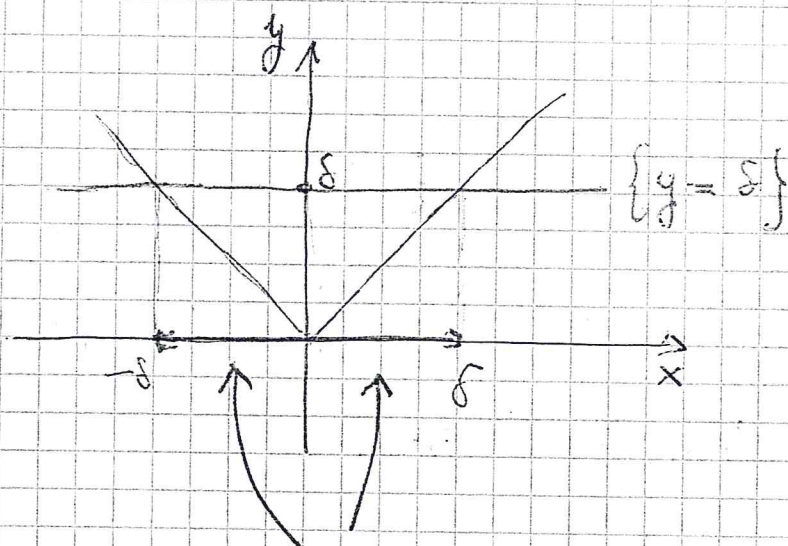
ES 1.3.2

La disuguaglianza

$$|x| \leq \delta \quad (3.1)$$

dove $\delta > 0$ è assegnato, equivale a

$$-\delta \leq x \leq \delta \quad (3.2)$$



Se $\delta = 0$
la soluzione
è $x = 0$

$[-\delta, \delta]$ intervallo degli x che verificano
(3.2) o equivalentemente (3.1)

ES 1.3.3

dim. della (2.1), che risale usando la proprietà di $| \cdot |$:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Se $x=0$ e $y=0$ è evidente. Se no, diamo

$\delta = |x| + |y| > 0$. La (3.3) equivale, grazie all'ES 3.2, a

$$-|x| - |y| = -\delta \leq x + y \leq \delta = |x| + |y| \quad (3.4)$$

Ma (3.4) è evidente:

$$x \leq |x|$$

$$\varepsilon \leq |\varepsilon|$$

$$\Rightarrow x + \varepsilon \leq |x| + |\varepsilon|$$

$$\text{Ed } x \geq -|x|$$

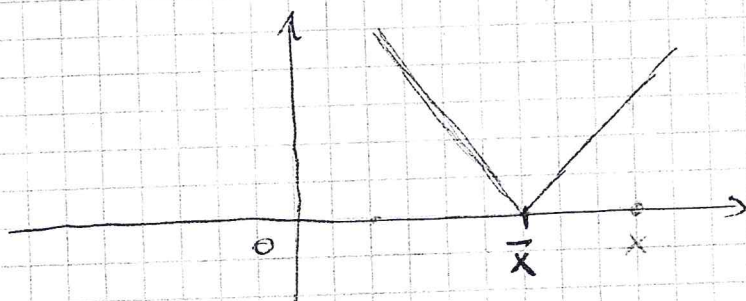
$$\varepsilon \geq -|\varepsilon|$$

$$\Rightarrow x + \varepsilon \geq -|x| - |\varepsilon|$$

□

Più in generale, preso $\bar{x} \in \mathbb{R}$, possiamo considerare

$$\text{dist}(x, \bar{x}) = |x - \bar{x}|$$



$$\text{In generale } \text{dist}(x_1, x_2) = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

La (2.1) diventa

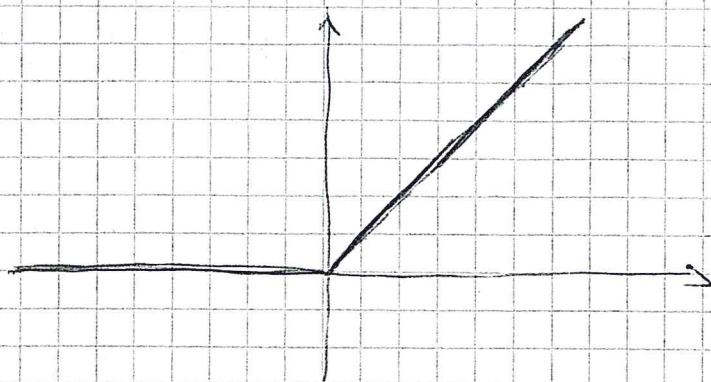
$$d(x_1, x_2) \leq \text{dist}(x_1, x_3) + \text{dist}(x_3, x_2)$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, \forall x_3 \in \mathbb{R}.$$

Funzione parte positiva e parte negativa:

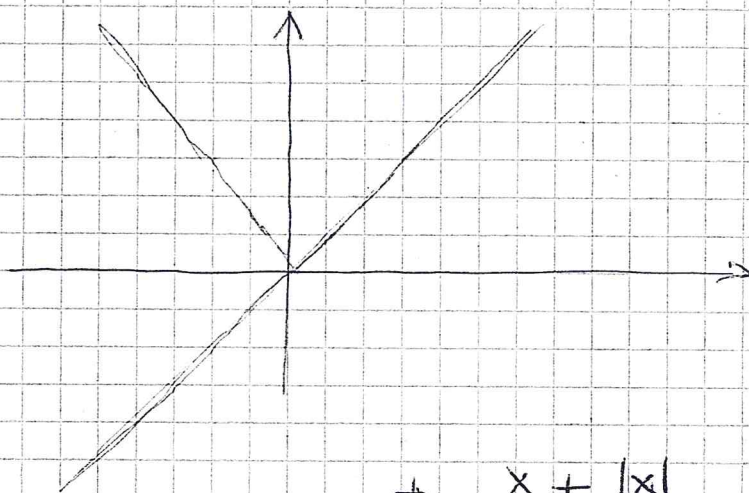
$$\text{Dati } x \in \mathbb{R} \quad x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

parte positiva di x



graph(x^+)

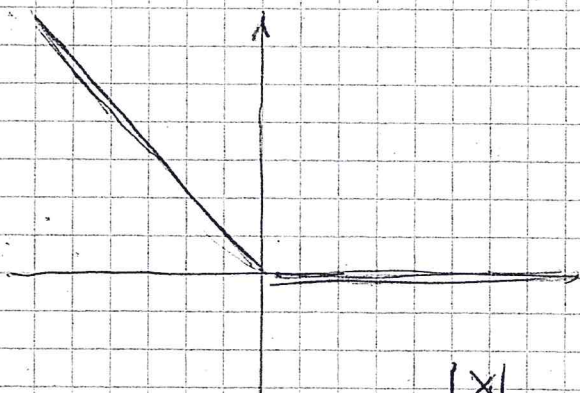
ES1.5.1 Una formula che lega $|x|$ con x^+



$$x^+ = \frac{x + |x|}{2}$$

(5.1)

Parte negativa x^- di x



graph(x^-)

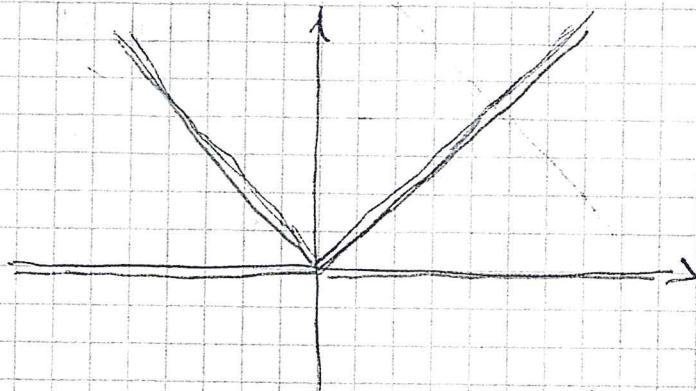
(Nota: $x^- \geq 0$)

$$x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

(5.2)

$$x^+ + x^- = \frac{x + |x|}{2} + \frac{|x| - x}{2} = |x|$$

ottenuta sommando (5.1) e (5.2)



« ROSSO + VERDE = NERO »

Sottraendo (5.1) e (5.2)

$$x^+ - x^- = \frac{|x| + x}{2} - \frac{|x| - x}{2} = x$$

La funzione identità come differenza di due funzioni nonnegative e monotone.

Def 1.6.1 Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo

(non ridotto a un punto, e non tutto $\mathbb{R}$ banalmente)
 Più in generale, $f: \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, con $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$)
 f si dice nondecrecente se

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

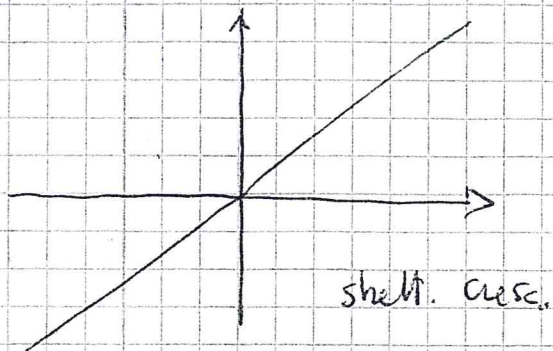
f si dice strettamente crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

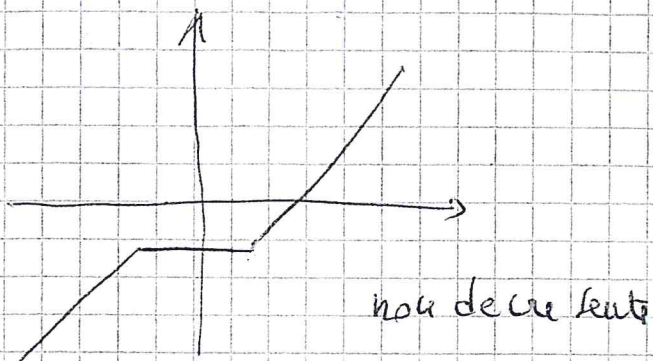
f si dice noncrescente se $-f$ è nondecrecente

f si dice strettamente decrescente se $-f$ è strett. crescente

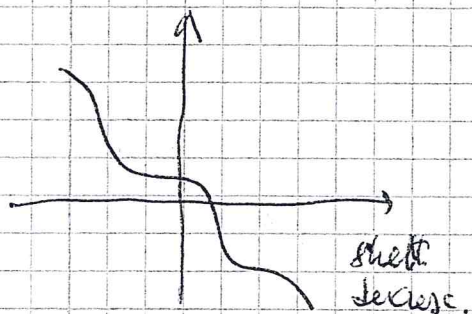
f si dice monotona se verifica delle una o più delle quattro proprietà.



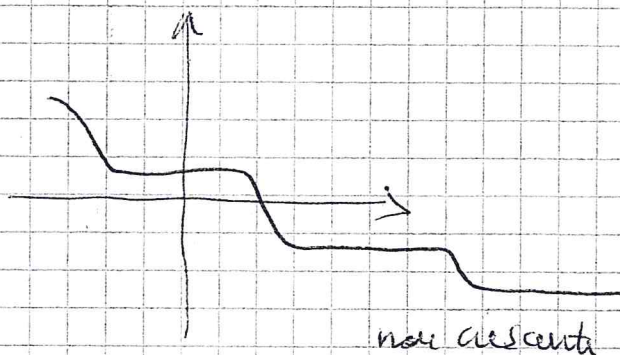
strett. cresc.



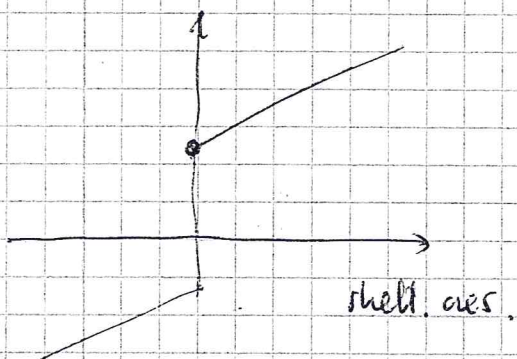
non decrescente



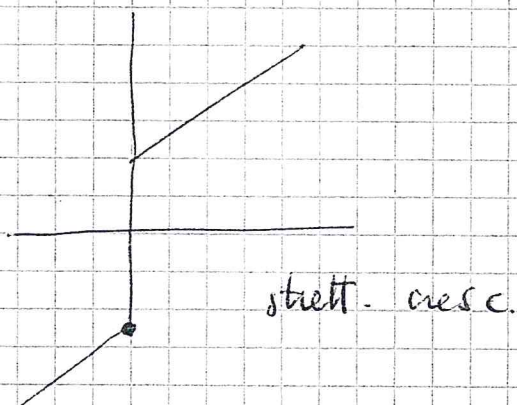
strett. decresc.



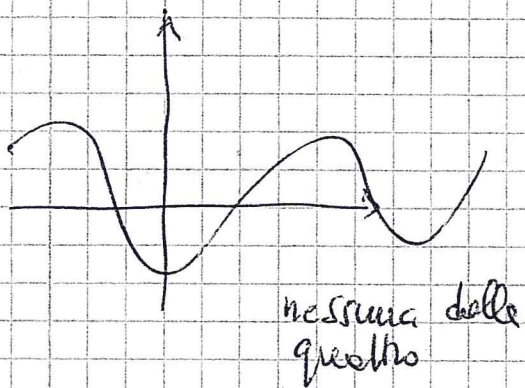
non crescente



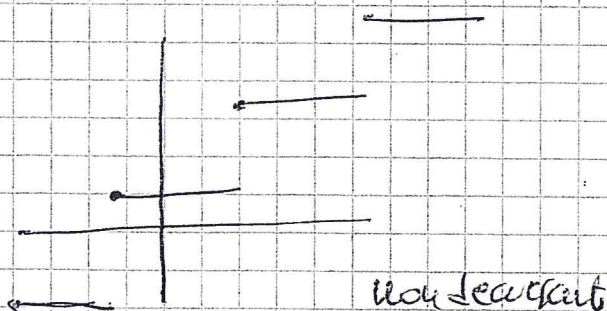
strett. cres.



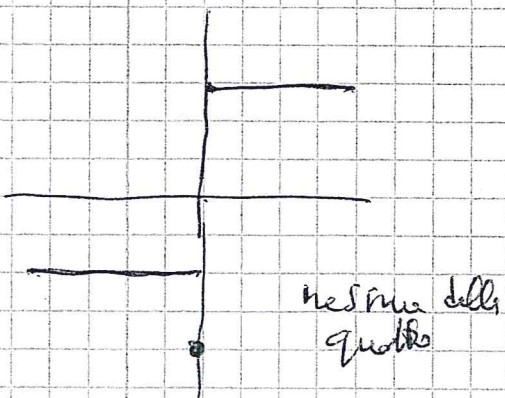
strett. cresc.



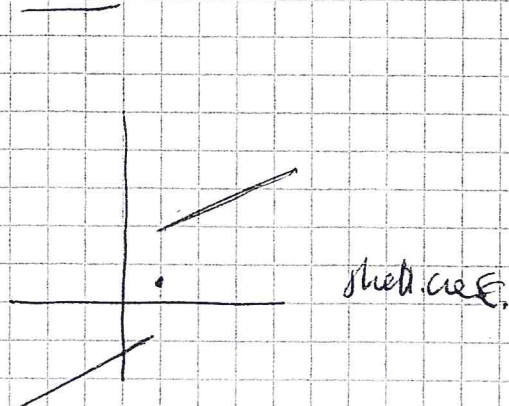
nessuna delle
quattro



non decrescente



nessuna delle
quattro

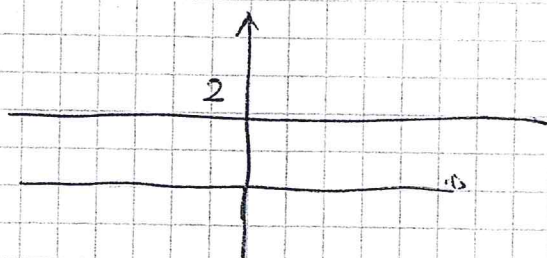


strett. cresc.

ES 1.8.1

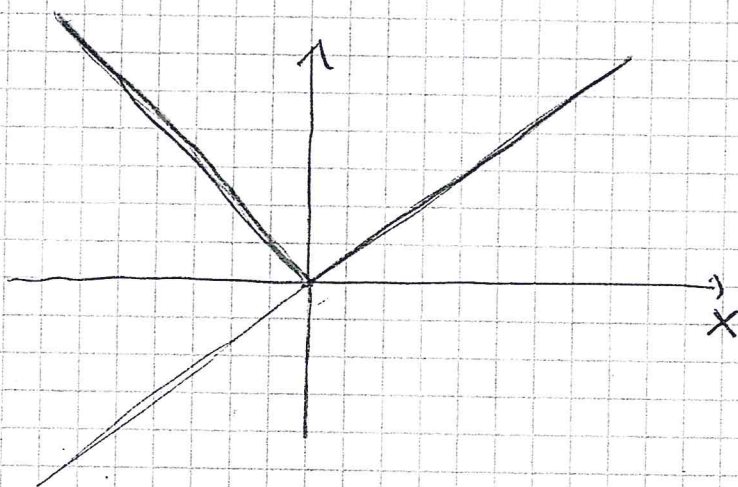
Esistono funzioni nascenti e decrescenti? ⁸

Le funzioni costanti!

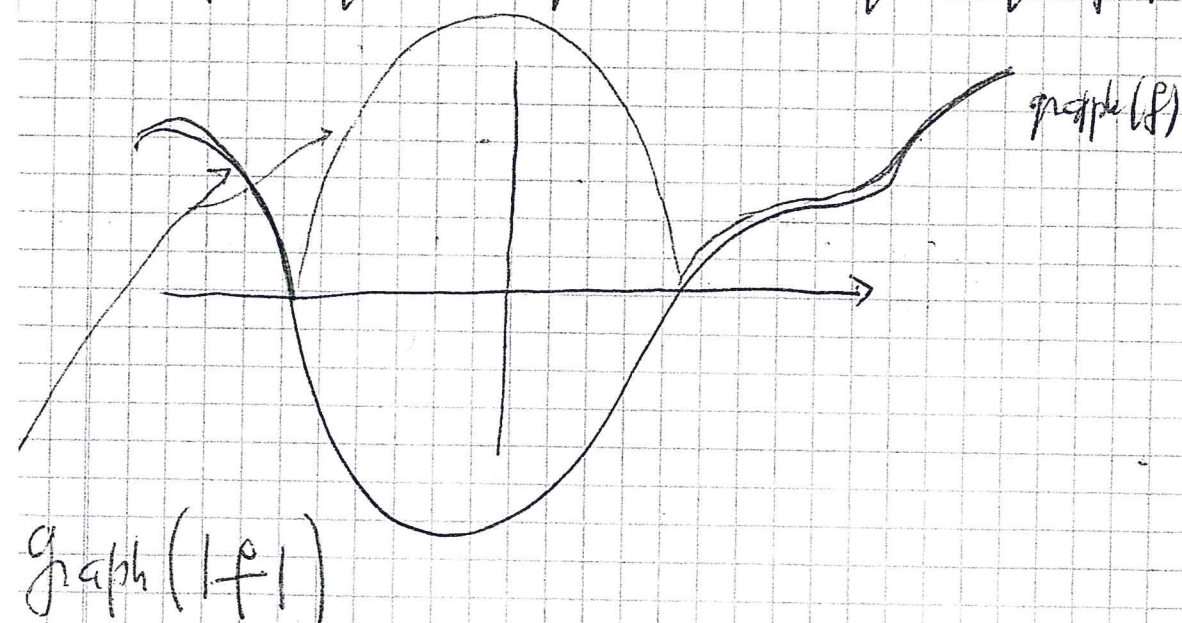


$$f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Abbiamo visto che un modo per costruire il valore assoluto è prendere $\text{id}(x) = x$, e rifletterlo rispetto a $\{y=0\}$, il grafico dove $\text{id}(x) < 0$.

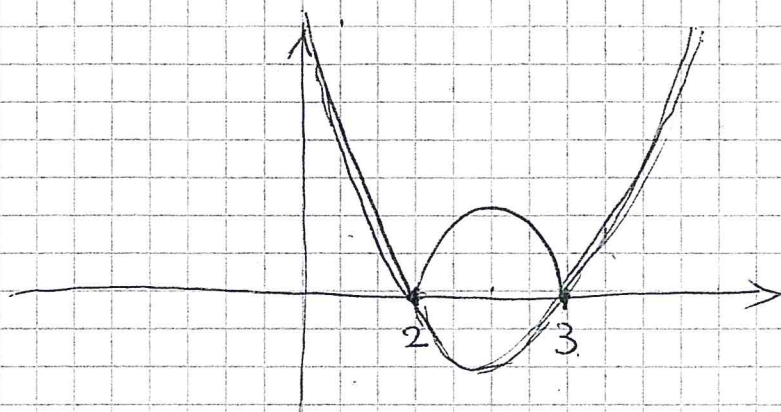


Posso fare questa operazione a qualunque funzione



ES 1.9.1 Disegnare il grafico della funzione $|f(x)|$, dove

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

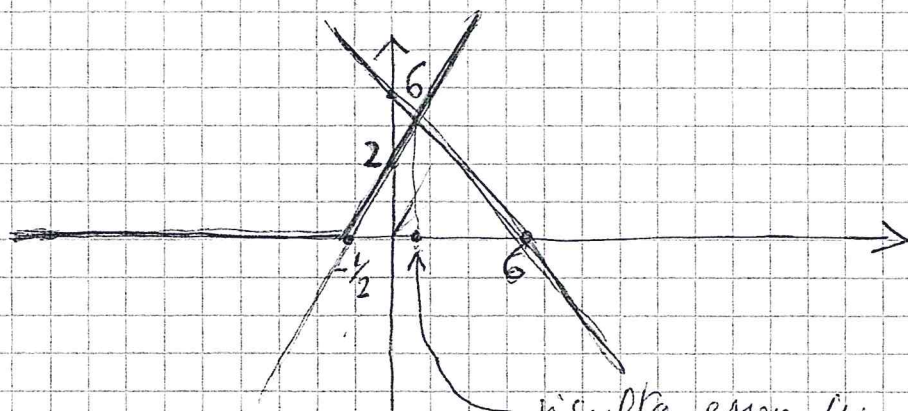


$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{dove } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{dove } f(x) < 0 \end{cases}$$

ES 1.9.2 Trovare le soluzioni $x \in \mathbb{R}$

$$(4x+2)^{\frac{1}{4}} = 6-x$$

Mi faccio una idea grafica!



risultava essere $4/5$ (vedi pag 10)

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$$

$\Rightarrow$ il termine noto è il prodotto delle radici,
il coefficiente del termine di primo grado
è - somma delle radici.

Dal grafico in questione si vede che la soluzione esiste ed è unica. Per trovarla usiamo (S.1):

$$\frac{4x+2 + |4x+2|}{2} = 6-x$$

$$2x+1 + |2x+1| = 6-x$$

$$3x-5 + |2x+1| = 0$$

$$|2x+1| = 5-3x$$

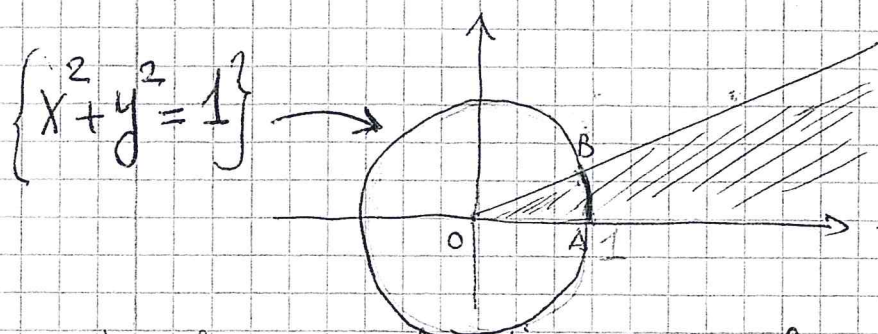
$$5-3x = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Nel caso } x \geq -\frac{1}{2} \quad 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\text{Nel caso } x < -\frac{1}{2} \quad x = 6 \quad \text{No}$$

Qualche cosa sulle funzioni trigonometriche.

11



angolo regolare di piano
delimitato dalla semiretta
e dall'arco dell' x

$\widehat{AB}$

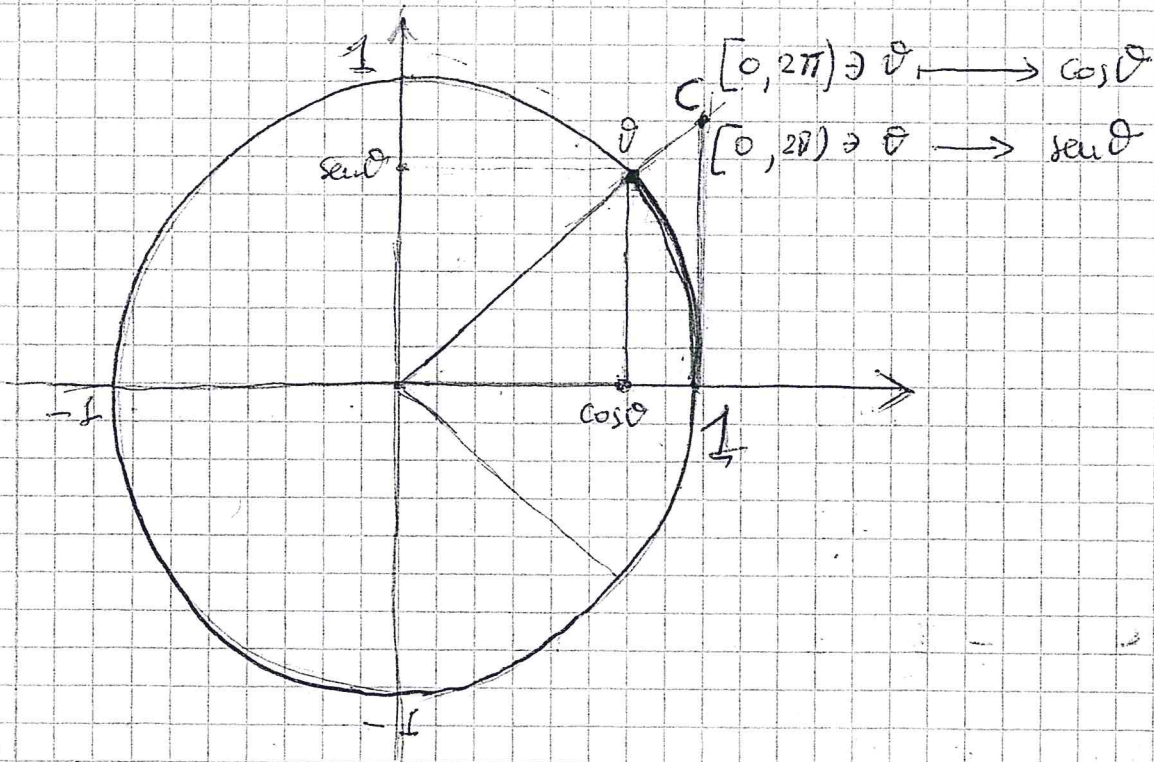
Angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza a raggio unito nel vertice O dell'angolo

di raggio 1

e contenuto nell'angolo.

Introduciamo seni e coseni di angoli in radianti

Quale è la relazione tra la lunghezza di $\widehat{AB}$ e l'area del settore circolare OAB ? Tale lunghezza è il seno dell'angolo



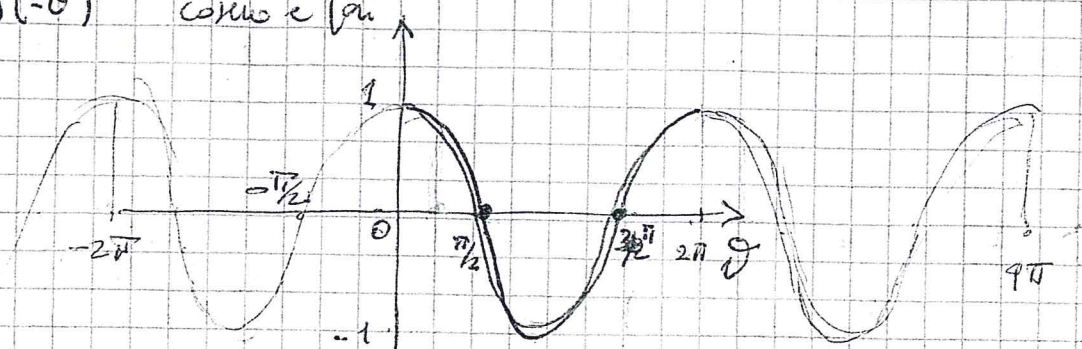
Angolo in gradi a

Angolo in radianti θ

$$\theta = \left[\frac{2\pi}{360} \right] a$$

conversione da gradi

$$\sin(0) = \sin(-0) \quad \text{coseno è pari}$$



Si considera di più l'estensione 2π -periodica del coseno.

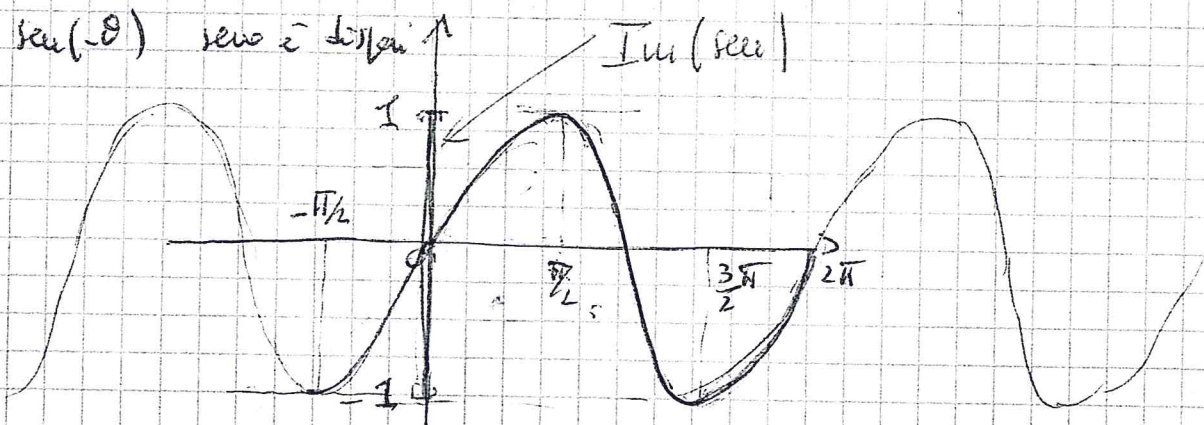
1.12.1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T > 0$.

Si dice che f è T -periodica se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il coseno è 2π -periodico. Si considera il minimo T per cui il coseno è T -periodico; $T_{\min} = 2\pi$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ seno è dispari



$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

$$\text{ind.} - (\cos \theta, \sin \theta) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$: x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

1.12.1 Consideriamo $\sin: \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$

di per gli intervalli $\subseteq [0, 2\pi)$ dove $\sin$ è invertibile?

considerare $\sin: \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$

$\sin : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$ è invertibile

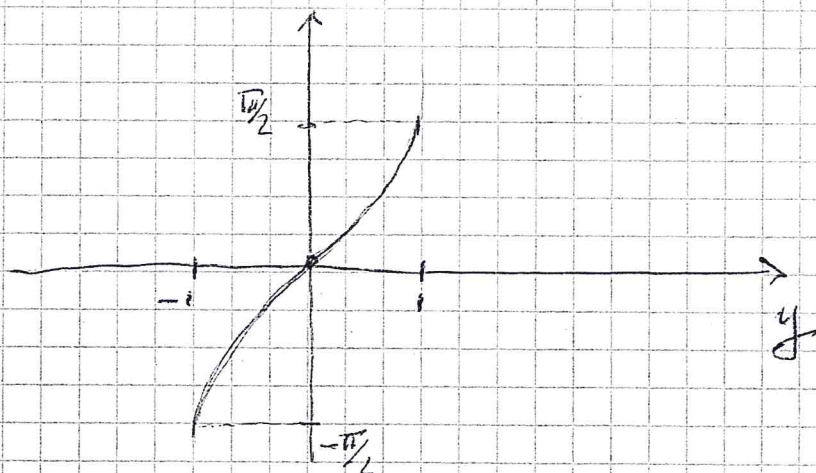
$\sin : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ " "

Analogamente $\cos : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ è invertibile

(Stesso discorso per il coseno di θ)

La funzione arcsen y è l'inversa della funzione
sopradetta: $y \in [-1, 1] \rightarrow \arcsen y \in [-\pi/2, \pi/2]$

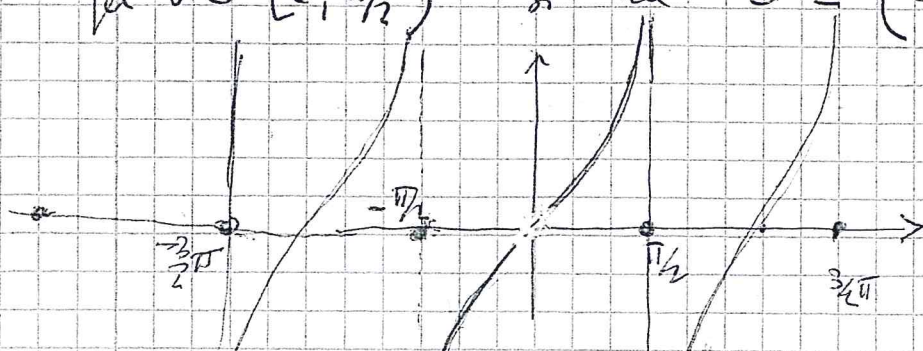
(stesso discorso per l'arcocoseno di y)



Def. 1.13.1 Sia $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ dispari

per $\theta \in [0, \pi/2)$ si ha $C = (1, \operatorname{tg} \theta)$



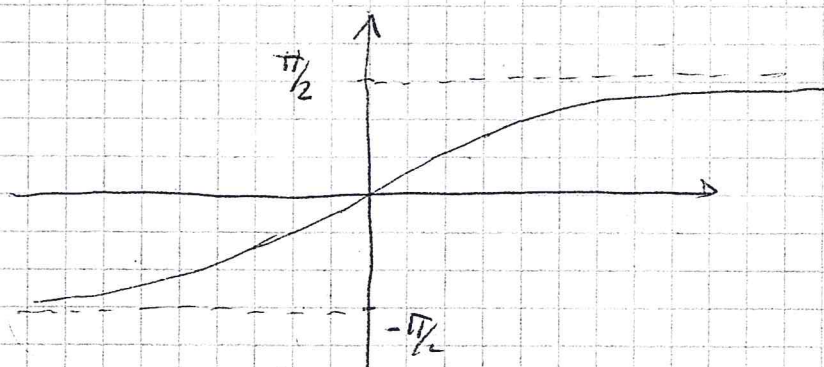
Per ora disegnatelo
solo in $(-\pi/2, \pi/2)$

$\text{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile e l'ungelivra.

È dunque invertibile, e l'ungelivra

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

ha un grafico del tipo:



OS 1.14.1

$$\vartheta \in (0, \pi/2) \Rightarrow \sin \vartheta < \vartheta < \text{tg} \vartheta$$

↑
?

ES 1.14.1

$$\sin \vartheta < \vartheta \quad \forall \vartheta > 0$$

$$|\sin \vartheta| < |\vartheta| \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}, \vartheta \neq 0$$

Ricordare che

$$\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

$$\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

ES 1.14.2

$$||x| - |z|| \leq |x - z|$$

$$\forall x, z \in \mathbb{R}$$

(cioè il valore assoluto è 1-Lip)