

Lezione 9

13/10/2020

12-13.25

1

• Lunedì 16.15-18.00 Ritenimento aula 103
mandare entro la domenica precedente una
mail a francesco.rica@unisi.it

• Venerdì esercitazioni (mista) 8.30-10.15
3 esercitazioni, ciascuna avrà un link

Esercizio Cosa c'è che non va ne

controllando le seguenti:

$$\text{potremmo } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$\underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{\frac{1}{3}} + \dots$$

> S

Come è possibile? Dove è l'errore?

LE SUCCESSIONI

Def Una successione (reale o complessa)

è una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$f(1) \in \mathbb{R}, f(2) \in \mathbb{R}, \dots, f(n) \in \mathbb{R}$ successione reale

Si indica con $f(n) = a_n$, oppure $f(n) = b_n$

Per indicare tutta la successione, scriviamo anche
 (a_n) , o $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Queste sono tutte
 notazioni.

Def (Sottosuccessione) Sia (a_n) una
 successione, quindi $a_n = f(n)$, con

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}. \quad \text{Sia } \varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

una funzione strettamente crescente. Allora

a_2 a_7 a_{14} a_{205} $a_{\dots}$
 $\uparrow$ sottosuccessione di (a_n) è una successione
 della forma

$$(f(\varphi(n))) = (f(\varphi(1)), f(\varphi(2)), f(\varphi(3)), \dots)$$

a_2 a_7 a_{14}

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 7, \quad \varphi(3) = 14, \quad \varphi(4) = 205$$

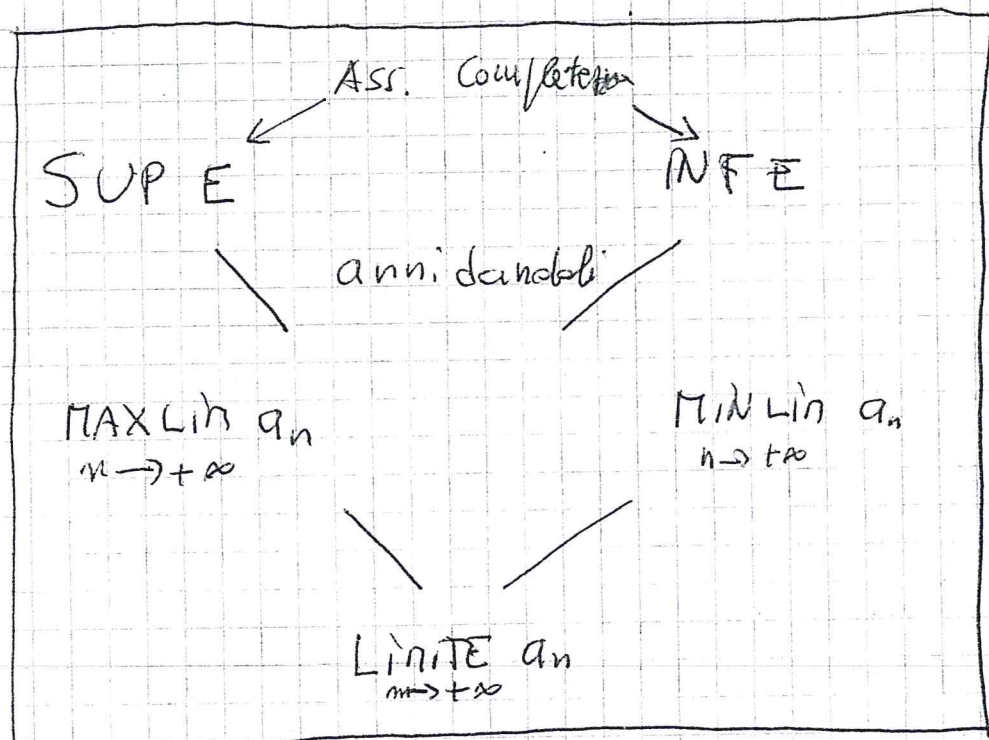
Notazione: a volte una sottosucc. $\sqrt[n]{\text{di } (a_n)}$ si indica anche
 con $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, o anche (a_{n_k})

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

n_1 n_2 n_3 $\vdots$
 $a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, a_{\varphi(3)}, \dots$

Una sotto sottosuccessione è una sottosuccessione
 di una sottosuccessione.

MASSIMO E MINIMO LIMITE DI UNA SUCCESSIONE REALE



Def Sia (a_n) una succ. di numeri real.

Si chiama ^{Minimo} massimo limite di (a_n) , o anche ^{inferiore} ^{superiore} limite di (a_n) , e si indica con $\max \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, o anche $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$,

la quantità:

$\inf_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sup_{k > n} a_k$$

o è un numero reale
o è $+\infty$

(3.1)

$\sup_{n \in \mathbb{N}}$

$$\inf_{k > n} a_k$$

o è un numero reale
o è $-\infty$

(3.2)

Nota (3.1), (3.2) sono ben definiti e appartengono ai reali estesi, $\mathbb{R} \cup \{ \pm \infty \}$

Exercício

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \equiv 1 (2) \\ 1 & n \equiv 0 (2) \end{cases}$$

$n \equiv 1 (2)$ significa n ímpar (ao se dividir n por 2 o resto = 1)

$n \equiv 0 (2)$ " " par depende só de n

Calcular $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n =: \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k$

$\forall n \in \mathbb{N}$ fixado, chamamos $b_n = \sup_{k > n} a_k$

Donque $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$

$$b_{10} = \sup_{k > 10} a_k = \sup \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\} = 1$$

$$\sup \{1, -1\} = \max \{-1, 1\} = 1$$

Donque $b_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ pois

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = 1$$

Para c_n : $c_n = \inf_{k > n} a_k$, se $c_n = -1$

$$\text{e } \sup_{n \in \mathbb{N}} c_n = -1$$

Note $-1 = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n < 1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ (só se $a_n \neq 1$)

Esercizio

$$a_n = \begin{cases} -3^n & n \text{ dispari} \\ 3^n & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$= (-3)^n = (-1)^n 3^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \sup_{k > n} a_k = \sup \{ a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots \}$$
$$= +\infty$$

Di conseguenza

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = +\infty$$

(Nota: $b_n \notin \mathbb{R}$,
ma ancora "up(+inf)"
= "+inf")

Per cosa

$$c_n = -\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} c_n = -\infty$$

Esercizio

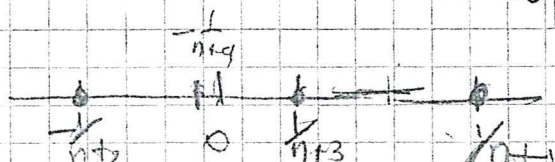
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \sup_{k > n} a_k = \sup \left\{ \frac{+1}{n+1}, \frac{-1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \frac{-1}{n+4}, \dots \right\}$$

$$= \sup_{k > n} a_k = \sup \left\{ \frac{1}{n+1}, \frac{-1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \frac{-1}{n+4}, \dots \right\}$$

$\uparrow$
 n dispari

$$= \frac{1}{n+1}$$



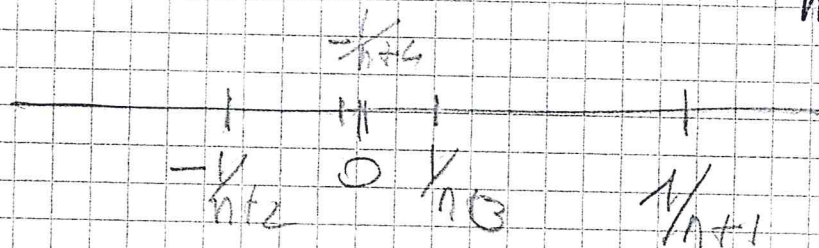
$$\Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$$

$$= \inf \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$c_n = \inf_{k > n} a_k = \inf_{\substack{\uparrow \\ n \text{ dispari}}} \left\{ \frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}, \dots \right\} = -\frac{1}{n+2}$$



$$\sup_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} -\frac{1}{n+2} = \sup \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \right\} = 0$$

Nota $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

« Quando il $\liminf$ e il $\limsup$ di una successione coincidono, la successione ammette limite »

CARATTERIZZAZIONE

Sia (a_n) una successione di numeri reali.

Poniamo $l^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $l^- = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Supponiamo $l^+, l^- \in \mathbb{R}$

Allora l^+ è caratterizzato da

$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. in } n$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n > l^+ - \varepsilon \quad \text{freq. in } n$$

In particolare $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l^+| < \varepsilon \quad \text{freq. in } n$

l^- è caratterizzato da

$$3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n > l^- - \varepsilon \quad \text{def. in } n$$

$$4) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < l^- + \varepsilon \quad \text{freq. in } n$$

In particolare $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l^-| < \varepsilon \quad \text{freq. in } n$

Se inoltre $l^+ = l^- =: l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon \quad \text{def. in } n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$$

Domanda: $\exists \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$?

Per ogni $n \in \mathbb{N}$
 $\inf_{k \geq n} a_k$ esiste sempre, perché

è $\inf$ di un insieme $\neq \emptyset$ di numeri reali. Il risultato del po

$\inf_{k \geq n} a_k$, dato $n \in \mathbb{N}$,
è un numero reale, o

può essere $-\infty$. Devo fare

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$ di numeri reali, o alla legge
 $-\infty$.

Quanto $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$ è reale? Quando

almeno uno dei a_n è reale.

Se tutti i a_n sono $= -\infty$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k = -\infty$.