

Lezione 8 7/10/2020

10.15.13

Dim. Cauchy pg 6 lezione 7 (criterio del rapporto). L'ipotesi dice

$$\exists N \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N$$

$$a_{n+1} \leq q a_n \quad \forall n \geq N$$

Sei ora $n > N$

$$a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \dots \leq q^{n+1-N} a_N$$

Possiamo considerare ora le somme parziali della serie $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ e cercare di stimarle (dall'alto), e trovare

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{+\infty} a_n &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N} a_N \\ &= a_N \sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N} \\ &= a_N \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = a_N \frac{1}{1-q} < +\infty \end{aligned}$$

vedi pagina 10
lezione 5

$$(0 <) q < 1$$

3

Deduco $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n < +\infty$. (2.1)

A me serve dim. che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$: Ma
 questo segue da (2.1) e dalla oss. pag 3
 lemma 6; oppure

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{N-1}}_{< +\infty} + \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} a_n}_{< +\infty \text{ (2.1)}} < +\infty$$

La dim. della 2) è simile (per caso)

Suggerimento: le somme parziali di
 $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ sono mappate = delle

corrispondenti somme parziali di $a_n \sum_{n=N}^{+\infty} q^n$,

e tali somme parziali hanno come sup $+\infty$.

Da cui $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow a_1 + \dots + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n = +\infty$.

13

1990-1991	1991-1992
1992-1993	1993-1994
1994-1995	1995-1996
1996-1997	1997-1998
1998-1999	1999-2000
2000-2001	2001-2002
2002-2003	2003-2004
2004-2005	2005-2006
2006-2007	2007-2008
2008-2009	2009-2010
2010-2011	2011-2012
2012-2013	2013-2014
2014-2015	2015-2016
2016-2017	2017-2018
2018-2019	2019-2020
2020-2021	2021-2022
2022-2023	2023-2024
2024-2025	2025-2026
2026-2027	2027-2028
2028-2029	2029-2030
2030-2031	2031-2032
2032-2033	2033-2034
2034-2035	2035-2036
2036-2037	2037-2038
2038-2039	2039-2040
2040-2041	2041-2042
2042-2043	2043-2044
2044-2045	2045-2046
2046-2047	2047-2048
2048-2049	2049-2050
2050-2051	2051-2052
2052-2053	2053-2054
2054-2055	2055-2056
2056-2057	2057-2058
2058-2059	2059-2060
2060-2061	2061-2062
2062-2063	2063-2064
2064-2065	2065-2066
2066-2067	2067-2068
2068-2069	2069-2070
2070-2071	2071-2072
2072-2073	2073-2074
2074-2075	2075-2076
2076-2077	2077-2078
2078-2079	2079-2080
2080-2081	2081-2082
2082-2083	2083-2084
2084-2085	2085-2086
2086-2087	2087-2088
2088-2089	2089-2090
2090-2091	2091-2092
2092-2093	2093-2094
2094-2095	2095-2096
2096-2097	2097-2098
2098-2099	2099-2100
2100-2101	2101-2102
2102-2103	2103-2104
2104-2105	2105-2106
2106-2107	2107-2108
2108-2109	2109-2110
2110-2111	2111-2112
2112-2113	2113-2114
2114-2115	2115-2116
2116-2117	2117-2118
2118-2119	2119-2120
2120-2121	2121-2122
2122-2123	2123-2124
2124-2125	2125-2126
2126-2127	2127-2128
2128-2129	2129-2130
2130-2131	2131-2132
2132-2133	2133-2134
2134-2135	2135-2136
2136-2137	2137-2138
2138-2139	2139-2140
2140-2141	2141-2142
2142-2143	2143-2144
2144-2145	2145-2146
2146-2147	2147-2148
2148-2149	2149-2150
2150-2151	2151-2152
2152-2153	2153-2154
2154-2155	2155-2156
2156-2157	2157-2158
2158-2159	2159-2160
2160-2161	2161-2162
2162-2163	2163-2164
2164-2165	2165-2166
2166-2167	2167-2168
2168-2169	2169-2170
2170-2171	2171-2172
2172-2173	2173-2174
2174-2175	2175-2176
2176-2177	2177-2178
2178-2179	2179-2180
2180-2181	2181-2182
2182-2183	2183-2184
2184-2185	2185-2186
2186-2187	2187-2188
2188-2189	2189-2190
2190-2191	2191-2192
2192-2193	2193-2194
2194-2195	2195-2196
2196-2197	2197-2198
2198-2199	2199-2200
2200-2201	2201-2202
2202-2203	2203-2204
2204-2205	2205-2206
2206-2207	2207-2208
2208-2209	2209-2210
2210-2211	

Days since start of study (X)	Days since last rainfall (Y)
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

100

Figure 1

Flowchart illustrating the selection process for the study.

The flowchart shows the progression from initial identification to final inclusion in the meta-analysis:

- Initial Identification: 100 studies identified through database searches.
- Screening: 20 studies excluded based on duplicates or irrelevant topics.
- Full-text Review: 80 studies screened based on abstracts.
- Inclusion: 10 studies included in the meta-analysis after full-text review.

 $\rightarrow N$

□

Esercizio. Confronto

6

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4^n} & n \text{ dispari}, n \in \mathbb{N} \\ \frac{15}{4^n} & n \in \mathbb{N}, n \text{ pari} \end{cases}$$

Studiare il carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Abbiamo $a_n \leq \frac{15}{4^n} = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dal teo del confronto (teo 2 pag 6): Poichè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{4^n} = 15 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = 15 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right)$$

$< +\infty$,

deduco $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

Posso ^{tentare di} applicare il criterio del rapporto? Sì, perchè $a_n > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{3}{4^{n+1}}}{\frac{15}{4^n}} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{\frac{15}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4^n}} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{15}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{12} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

? $\exists q \in (0, 1) : a_{n+1}/a_n \leq q$ def in n ? No, $\frac{15}{12} > 1$

La applicazione del criterio del rapporto
non porta al risultato.

Posso tentare di applicare il criterio della
radice? Sì.

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{3}}{4} & n \text{ dispari} \\ \frac{\sqrt[n]{15}}{4} & n \text{ pari} \end{cases}$$

? $\exists q \in (0, 1) : \sqrt[n]{a_n} \leq q$ def. in n ?

Sì, si può dimostrare che

se n è abb. grande $\sqrt[n]{15}$ è poco
+ grande di 1; anzi basta cercare $\bar{n} : \forall n > \bar{n}$

$$\sqrt[n]{15} < 4$$

$$15 < 4^n ; \quad n \geq 2 = \bar{n}$$

ESERCITATORI : CINQUEGRANA

MARATTA

ZANVETTOR

TABELLA

SERIE A TERMINI POSITIVI

CARDINE : TEO. CONFRONTO (E SUA VERSIONE DEFINITIVA)

CRITERIO RAPPORTO

CRITERIO RADICE

TEO. DEI BLOCCHETTI 2^n (pg. 8)

DOMANDA QUANTITATIVA :

quanto vale la serie?

stima la serie $\leq 0 \leq$



$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

$$x \geq 0$$

$$x=0 \quad \Sigma' = 0$$

$$x \in (0,1) \quad \Sigma' = \frac{1}{1-x}$$

$$x \geq 1 \quad \Sigma' = +\infty$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$$

con stima $\in \left(\frac{8}{3}, \frac{67}{24}\right)$

ES

se $\alpha > 2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$$

(dal confronto)
con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

se $\alpha \in [0,1)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$$

(dal confronto)
con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

? "Che fa la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

con $\alpha \in (1,2)$?

Non si può ^{facilmente} rispondere a questa domanda usando il ^{test del} confronto e i risultati elencati a pag 6.

Infatti, per $\alpha \in (1, 2)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

« questa stima dall'alto non dice nulla »

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in (0, +\infty)$$

« questo stima dal basso non dice nulla »

Ricordo però che ho usato il confronto

$$\text{per } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

A me pare che questo sia un argomento + astuto (forse) degli argomenti usati, ad esempio, per il rapporto e la radice:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha$$

non riesco a applicare il criterio del rapporto.

Teo Sia (a_n) un succ. reale di numeri

≥ 0 . Supponiamo che (a_n) sia
decrescente ($a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$

Vediamo se possiamo applicare il teorema

a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in (1, 2)$. In questo

Caso $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ è decrescente $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n(1-\alpha)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}$

e $\alpha - 1 > 0$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$

serie geom. di ragione $2^{1-\alpha} < 1$.

Se il teorema è vero, si deduce

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \quad \forall \alpha \in (1, 2)$

TABELLA

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \quad \text{per } \alpha > 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{per } \alpha \in (0, 1]$

Dim (teorema) Sia $S_m = \sum_{k=1}^m a_k$; calcoliamo $\checkmark$

$$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \right)}_{\substack{2^k \text{ addendi} \\ n \text{ addendi}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$S_{2^{n+1}}$ è $a_1 + a_2 + n$ blocchi, il k -esimo blocco dei quali ha 2^k elementi $n=3$

$$a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{2^1 \text{ add.}} + \underbrace{(a_5 + \dots + a_8)}_{2^2 \text{ add.}} + \underbrace{(a_9 + \dots + a_{16})}_{2^3 \text{ add.}} = S_{2^4}$$

per ipotesi $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (9.1)$

Usiamo la (9.1) per stimare dall'alto e dal basso $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \right)$

Fissato $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{2^{k+1}} \leq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \leq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{2^k+1}$$

$$\parallel$$

$$2^k a_{2^{k+1}} \qquad \qquad \qquad = 2^k a_{2^k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \right) \leq \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^{k+1}}$$

$$a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^{k+1}} \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^{k+1}}$$

« la somma parziale 2^{n+1} -esima della

serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è miscolata ^{quasi} a meno

di appiungere $a_1 + a_2$, tra 2 somme

parziali n-esime dell'altra serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \Rightarrow$

Si vede che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sup_n S_{2^{n+1}}$.

Con un piccolo ragionamento finale,

la dim. è conclusa $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \sup \{ S_m : m \in \mathbb{N} \} \\ &= \sup \{ S_{2^n} : n \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

$$S_N' = \sum_{k=1}^N 2^k a_{2^k}$$

A pag 2 lemma 7 noi abbiamo dim.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \in \left(\frac{8}{3}, \frac{67}{24} \right)$$

(pur non sapendo il valore preciso di questa serie)

Teo $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

« In altre parole, e non è un numero razionale »

Dim Consideriamo la code della serie
$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

1° fatto (difficile)

$$(n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{n+2}{n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \right)$$

equivalentemente

12

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che si può leggere come una stima
quantitativa della coda della serie.

$$(n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

questo dimostra 1° fatto.

Seconda parte della dim: Supponiamo per
assunto $e \in \mathbb{Q}$; $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

e applichiamo il 1° fatto con la

scelta $n = q$: si ha

$$\left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1}$$

Per caso

$$\frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q}$$

Se questo è vero deduco

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \quad \text{con}$$

$$q! \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{q}$$

Da qui (caso) dedurre un assurdo

(non c'è un intero > 0 più piccolo di 1
 $(\frac{1}{q} < 1)$).