

Lezione 7

6/10/2020

12-13.40

Ricevimenti: telematico

UN-Perf

Giovedì 10-11

12-13.40

BELLETTINI@DIISM.UNISI.IT

(con invito google meet)

Dopodomani (venerdì 8/10/2020) esercitazione
al posto della lezione.

Abbiamo 3 nuovi esercizi.

ES (cosa): "la coda di una serie
(a termini ≥ 0) è piccola quanto si vuole"

Sia (a_n) una succ. di numeri reali ≥ 0 ,

e supponiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$\left(\text{cioè } S_N := \sum_{n=1}^N a_n, \quad \sup_N S_N < +\infty \right)$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\bar{n}} a_n = \sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n < \varepsilon$$

$$\parallel \sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n - S_{\bar{n}}$$

Consideriamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Converge o diverge?

Se converge, posso almeno stimare quanto vale?

$$0! \stackrel{!}{=} 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

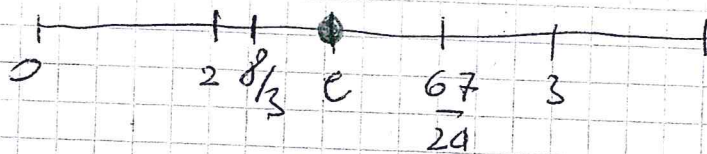
Il risultato sarà che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$

e dunque potremo

$$e := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Inoltre $\left\{ \begin{array}{l} \text{vedremo che,} \\ e \in (2, 3) \end{array} \right.$, anzi meglio

vedremo che $e \in \left(\frac{8}{3}, \frac{67}{24} \right)$



oss: Vedremo in seguito un'altra possibile definizione di e .

Vedremo infine, forse, $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lo strumento fondamentale è il tes del
Coulomb:

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k}$$

Oss
(3.1) $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$

Nota Usando il Coulomb con Mengoli
per rispondere affermativamente alla domanda

1; non sapendo per quanto fa

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$, non può probabilmente
rispondere alla domanda 2.

$$\forall k \geq 1 \quad 2^{k-1} \leq k!$$

$$k=1 \quad 2^0=1 \leq 1! = 1$$

Snll. $2^{n-1} \leq n!$ dimostriamo

$$2^n \leq (n+1)!$$

Si ha

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \leq 2n! \stackrel{n \geq 1}{\leq} n! (n+1)$$

Da qui la (3.1) vale.

Idea

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &\stackrel{(3.1)}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \checkmark = (*) \end{aligned}$$

$= 1 + \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^h$

Ricordiamo (serie geometrica):

$$\begin{aligned} x \in (0, 1) &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \\ \left(\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1 \right) &\quad \left(\text{con } x = \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(*) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

Abbiamo dim. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq 3$, ma
si vede subito che < 3 .

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 1 + 1 = 2$$

> 0

Abbiamo usato: confronti

(3.1)

Serie geometrica

"Miglioramento di (3.1):

$$(5.1) \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 4$$

Infatti $\nearrow k=4$ si $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ ✓

(usiamo la pg 9 lemma 2,

Se $\forall n \geq 5 \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$

allora $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Demo. dim. $\frac{2^{n+1}}{n} \leq (n+1)!$

$$2 \cdot 2^n \leq 2n! \leq (n+1)(n!)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\stackrel{(5.1)}{\leq} \frac{5}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{8}{3} + \underbrace{\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{2^k}}_{>0}$$

$$\Rightarrow e > \frac{8}{3}$$

$$\text{cloud} = \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-4+4}} = \frac{1}{16} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-4}}$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2^h} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow e < \frac{8}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \quad \square$$

Cor (del teo del confronto definitivo, lez 6)
(^{critero} teo del rapporto)

Sia (a_n) succ. numeri reali ≥ 0 .

1) Sia $q \in (0, 1)$. Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{def. in } n$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

$$a_{n+1} \leq q a_n$$

$$a_{n+2} \leq q a_{n+1} \leq q^2 a_n$$

2) Sia $q \in (1, +\infty)$. Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad \text{def. in } n$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

Nota: il criterio del rapporto non dice nulla per $q = 1$ (che è un caso interessante); ad esempio, consideriamo

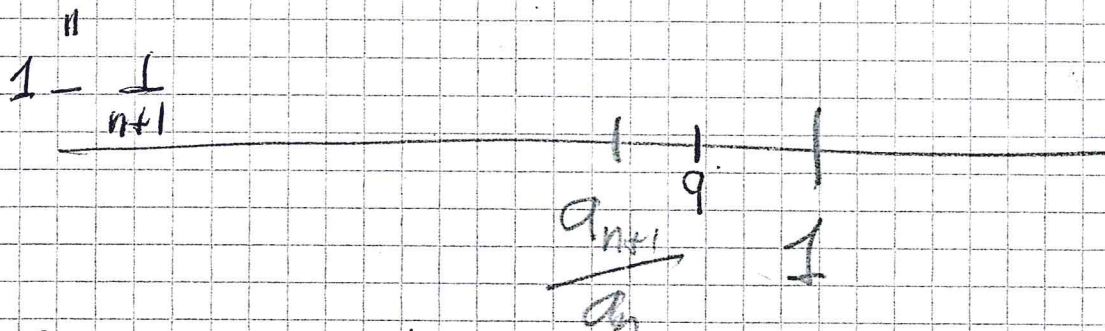
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

In questo $a_n = \frac{1}{n}$, e dunque

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ma domandasi: $\exists q \in (0, 1)$ tale che

$$\frac{n}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{Def. m. n.? No}$$



Rendendosi conto per caso.

$\Leftarrow \frac{n}{n+1}$ va a destra di un qualunque

$q < 1$ se n è abbastanza grande $\Rightarrow$

Deduciamo che non è possibile applicare
il criterio del rapporto alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$