

Lezione 6 1/10/2020 8.30-10.15

Def Sia (a_n) una successione. (a_n) si dice
monotona $\rightarrow$ crescente (strettamente) se

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si dice non decrescente se

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si dice strettamente decrescente se $(-a_n)$
è strettamente crescente. si dice non
crescente se $(-a_n)$ è non decrescente.

Se $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sup \{ S_N : N \in \mathbb{N} \}$$

dove $S_N := \sum_{j=1}^N a_j$

Notiamo che (S_n) è monotona non
decrescente.

? $\swarrow$ la serie converge o diverge
 $\searrow$ Calcolare, o stimare, il valore

Lo strumento + importante per rispondere
alla 1^a domanda, è il principio di
confronto:

Teo (CONFRONTO TRA SERIE A TERMINI ≥ 0)

Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni di
numeri reali ≥ 0 . Allora

1) Se $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

2) Se $a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

Dim 1) Sia $N \in \mathbb{N}$;

$$S_N := \sum_{j=1}^N a_j, \quad \sigma_N := \sum_{j=1}^N b_j$$

$$S_N \leq \sigma_N$$

(2.1)

Da (2.1) segue

$$\sup_N S_N \leq \sup_N \sigma_N$$

|| def || def

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{+\infty} b_j$$

Dunque se $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty.$

2)

$$S_N \geq \sigma_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_N S_N \geq \sup_N \sigma_N$$

|| def || def

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \geq \sum_{j=1}^{+\infty} b_j$$

Dunque $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j = +\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty.$

oss Il carattere di una serie (che se converge o diverga) non cambia se ne modifichiamo solo un n° finito di addendi.

PER CASA

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$, e preso $n \in \mathbb{N}$,

e presi $a'_1, \dots, a'_n \in \mathbb{R}$, e considero

$$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j$$

dove

$$b_j = \begin{cases} a'_j & j \in \{1, \dots, n\} \\ a_j & j \geq n+1 \end{cases}$$

allora devo dim. che $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty$

(...)

Def. Se $P(n)$ è una proprietà che dipende da $n \in \mathbb{N}$, dico che $P(n)$ è vera definitivamente $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \text{è vera da un certo } n \text{ in poi}$. Dico che $P(n)$ è frequentemente vera $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \text{è vera per infiniti valori di } n$.

Ex Corso def $\Rightarrow$ freq, e il viceversa non è necessariamente vero.

Teo (del confronto definitivo) PER CASA

Sia $a_n \geq 0, b_n \geq 0$. Allora:

1) Se $a_n \leq b_n$ def. in n

$$\text{e } \sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty \text{ allora}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$$

2) Se $a_n \geq b_n$ def. in n

$$\text{e se } \sum_{j=1}^{+\infty} b_j = +\infty \text{ allora}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty.$$

Questi risultati ci permettono di dire

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} = +\infty \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty \quad (5.2)$$

$$? \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha} \quad ? \quad \alpha \in (1, 2)$$

(S.1): $b_j = \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$$a_j = \begin{cases} 1 & j=1 \\ \frac{1}{2} & j \geq 2 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty$$

$$S_N = \sum_{j=1}^N a_j$$

$$\sigma_N = \sum_{j=1}^N b_j$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{N}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}$$

$$\& N = 2^k, \quad k \geq 2$$

$$b_1 + \dots + b_{2^k} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$k-1$ volte

$$\sigma_{2^k} > S_{2^k} \quad \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} b_j \geq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty$$

Ref. Ettore

(5.2)

7

$$a_j = \frac{1}{j^2}$$

$$S_N = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \quad ??$$

ES (serie di Penguoli). Si ha

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} < +\infty$$

SERIE
TELESCOPICA

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = a_j ; \quad \text{SERIE}$$

$$S_N = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

ES $\sup_N S_N = 1$. Per vederlo, uso corollario pag 9 let 5

1) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad 1 - \varepsilon < S_N$

2) $1 \geq S_N \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \text{EVIDENTE}$

1) Sia $\varepsilon > 0$; cerco $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{N+1}$$



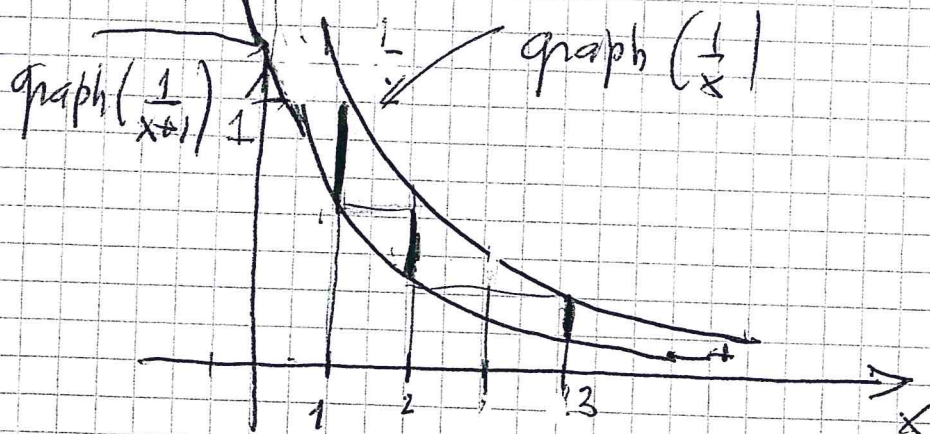
$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon$$



$$N+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Ad esempio $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$$



Resta da dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty$$

Fare confronto con Mengoli.

Esempio ieri: se $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

$$\text{Se } x=1 \quad \text{Si} \quad (0=0)$$

$$\text{Se } x \neq 1 \quad \text{l'equazione} \Leftrightarrow 1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1+x+\dots+x^n$$

$$-x - x^2 - \dots - x^{n+1}$$

$$= 1 - x^{n+1}$$

L'esempio era: data $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

Se $x=0$ la serie converge, e il suo valore è 0
 Se $x=1$ la serie diverge

10
e $x > 1$ la serie diverge, per il
teorema del confronto.

Resta il caso $0 < x < 1$; $x \in \mathbb{N}$

$$S_N = \sum_{j=1}^N x^j = x + x^2 + \dots + x^N$$
$$= \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^N}_{\sum_{j=0}^N x^j} - 1$$

$$= \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} - 1$$

$$\sup_N S_N = ? = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$\text{Anche } \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (0, 1)$$

per dimostrarlo, usare la

convergenza a pay 9 lezione 5

$$\mu = \frac{1}{1-x}, \quad E = \left\{ \sum_{j=0}^N x^j, N \in \mathbb{N} \right\}$$