

Lezione 5

30/9/2020

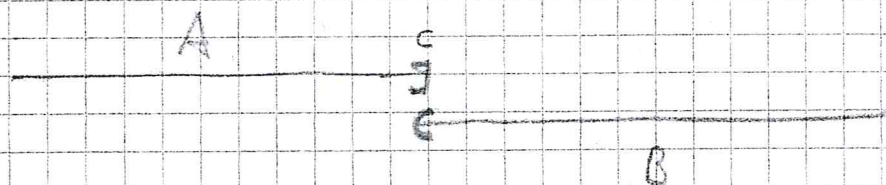
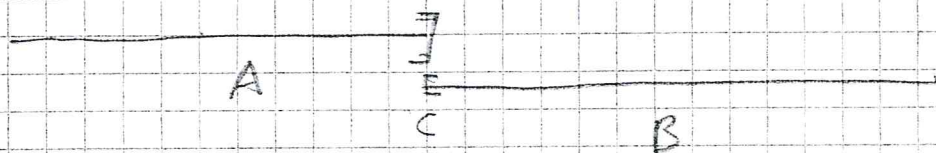
10.15 - 13.30

ES (cosa): Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$,

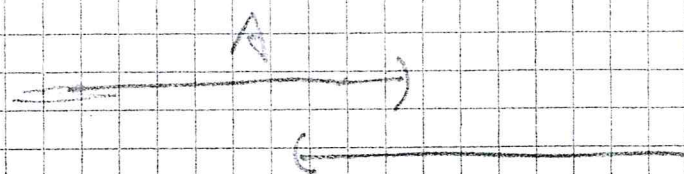
$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$

$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq b$

Allora $\exists! c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A$
 $\forall b \in B$

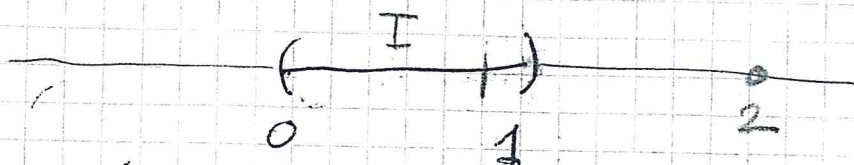


No



Vogliamo definire (vedi pag 3 lezione 1,
nota bene ...) un "intervallo del
minimo" $\Rightarrow$ (vedi esercizio a pag 8)

ii) $I = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \}$



$$\cancel{\nexists} \min I, \quad 0 \notin I$$

Def Sei $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

① Alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ st. d. fce

un maggiorante di $\mathbb{E}$ e

$$X \geq c \quad \forall c \in E$$

Проблема: найти искомый $E \in \mathbb{R}$ на
аналитическо маггнраути

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{E} = \mathbb{N} \\ \mathbb{E} \Rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{E} = \mathbb{Q} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{E hat} \\ \text{"} \\ \text{"} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{hat} \\ \text{"} \\ \text{"} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Maphraum} \\ \text{"} \\ \text{"} \end{array} \right\} (1.1)$$

Def $\text{Maior}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ maggiorante di } E\}.$

Per gli insiemi E nella (1.1) si ha $\Pi_{\text{ator}}(E) = \emptyset$

Def Se $\text{Major}(E) = \emptyset$ si definisce
 l'estremo superiore di E , e si indica
 con $\sup E$, $\sup E := +\infty$

Analogamente:

$$\text{Minor}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq e \ \forall e \in E\}$$

Se $\text{Minor}(E) = \emptyset$ si definisce l'estremo inferiore
 di E , $\inf E := -\infty$

Def Supponiamo $\text{Major}(E) \neq \emptyset$

si definisce, l'e esiste

$$\sup E := \min(\text{Major}(E))$$

Se $\text{Minor}(E) \neq \emptyset$, si definisce, l'e esiste

$$\inf E := \max(\text{Minor}(E))$$

↑ questo è il minimo
 del minimo, di cui si parlava
 a pag 2

$$\underline{E} \quad C = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} \quad \swarrow$$

$$E = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

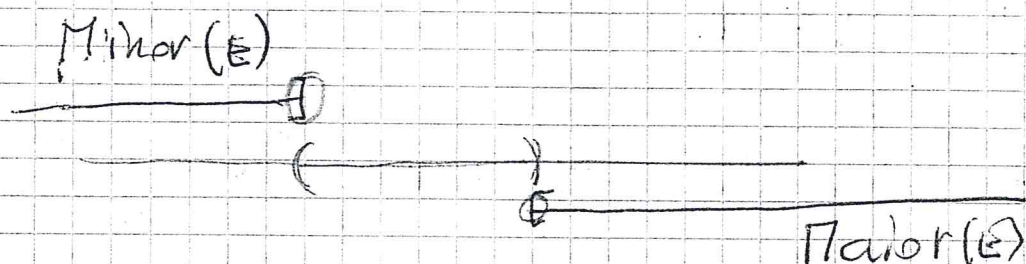
$$Maj\text{or}(E) = [1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

$$Min\text{or}(E) = (-\infty, 0]$$

$$Maj\text{or}(C) = [1, +\infty)$$

$$\min(Maj\text{or}(E)) = 1 = \sup E$$

$$\max(Min\text{or}(E)) = 0 = \inf E$$



N.B. se $E = [0, 1]$

$$\min E = \inf E$$

$$\max E = \sup E$$

Def Se $Maj\text{or}(E) \neq \emptyset$ E si dice

superiormente limitato (o limitato dall'alto)

Se $Min\text{or}(E) \neq \emptyset$ E si dice

inferiormente limitato (o limitato dal basso)

Se E è limitato superiormente e inferioremente
 si dice che E è limitato.

↑
 questo non ha niente a che vedere
 con la nozione di limite.

ES (CASA): Trovare

$$\sup \mathbb{N} = +\infty$$

$$\sup (4, +\infty) = +\infty$$

$$\inf \{ x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1 \} = 0$$

$$0 = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n} \right\} \quad (3.1)$$

$$\max \{ \cdot \} = 1 = \sup \{ \cdot \}$$

Teo Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$

Supponiamo $\Pi_{\text{supr}}(E) \neq \emptyset$

Allora $\exists$ (ed è unico)

$$\min(\Pi_{\text{supr}}(E)). \quad (5.1)$$

Se $\Pi_{\text{supr}}(E) \neq \emptyset$, allora $\exists$ (ed è unico)

$$\max(\Pi_{\text{supr}}(E)).$$

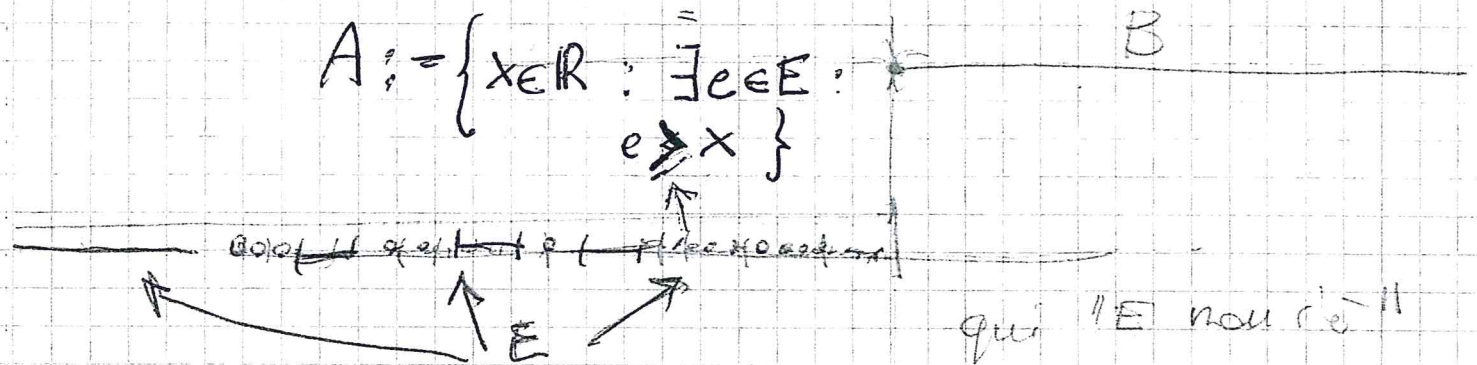
Dim. Dimostrare che esiste la quantità
nel (S.I), essendo la dimostrazione
della parte restante del tutto nulla.

$$E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset, \text{maior}(E) \neq \emptyset$$

Chiamo $B := \text{maior}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq e \ \forall e \in E\}$

Definiamo

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists e \in E : e \leq x\}$$



Si ha $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$;

$A \neq \emptyset$: infatti $A \supseteq E, E \neq \emptyset$ per ipotesi

se $e \in E$, ho $e \geq e \Rightarrow e \in A$

$B \neq \emptyset$ per ipotesi

Vediamo che $A \cup B = \mathbb{R}$.

Vediamo che $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$: ma questo
è evidente ($A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$).

Vediamo che $A \cup B \supseteq \mathbb{R}$. Devo vedere che
se $x \in \mathbb{R}$ allora $x \in A$ oppure $x \in B$.

Se $x \in \mathbb{R}$; se $x \in B$ siamo a posto.

Se $x \notin B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq c \ \forall c \in E\}$

allora $\exists c \in E : x < c$

Ma dunque $\exists c \in E : x \leq c \Rightarrow x \in A$

Dimostriamo ora che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

Se $a \in A$; allora $\exists c \in E : a \leq c$

Se $b \in B$; $\forall c \in E \quad b \geq c$

$$\Downarrow \\ a \leq b$$

Grazie all'esercizio di pag 1,

$$\boxed{\exists ! c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B}$$

La dimostrazione è conclusa se dimostriamo⁸
che $C = \min(\text{Major}(E))$

Dobbiamo dunque dimostrare:

1) $C \in \text{Major}(E)$

2) $C \leq d \quad \forall d \in \text{Major}(E)$

Dalla $\boxed{\leq}$ a pag 7 sappiamo

$$C \leq b \quad \forall b \in \text{Major}(E),$$

che è la 2)

Dalla $\boxed{\leq}$ a pag 7, sappiamo che

$$C \geq a \quad \forall a \in A$$

Dato che $A \supseteq E$ si ha $C \geq e \quad \forall e \in E$

ossia $C \in \text{Major}(E)$ $\square$

Es (casi): sia $E \neq \emptyset$, $\text{Major}(E) \neq \emptyset$.

Supponiamo che $\exists \min E$. Allora

$$\min E = \inf E$$

« Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette minimo, tale minimo coincide con l'estremo inferiore di E .

Se E non ammette minimo, l'estremo

inferiore di E esiste sempre $\begin{cases} -\infty & \text{se } \inf(E) = \emptyset \\ \in \mathbb{R} & \text{se } \inf(E) \neq \emptyset \end{cases}$

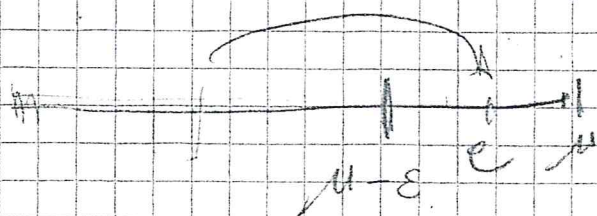
CARATTERIZZAZIONE (CHE SERVE SPESSE PER FARE GLI ESERCIZI): Possiamo

$\mu = \sup E$, e supponiamo $\mu < +\infty$.

Allora μ è caratterizzato da:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E \quad \mu - \varepsilon < e$
 « qualunque numero più piccolo di μ non è maggiorante »

2) $\mu \geq e \quad \forall e \in E$
 (cioè μ è un maggiorante di E)



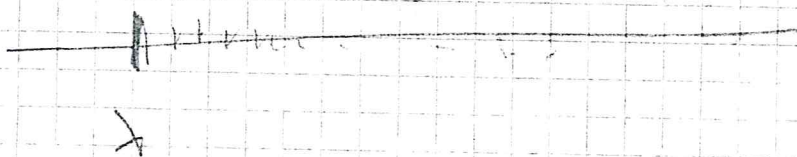
$$\lambda = \inf E \quad \text{se}$$

$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E \quad \lambda + \varepsilon > e$$

« qualunque numero più grande di λ non è minorante »

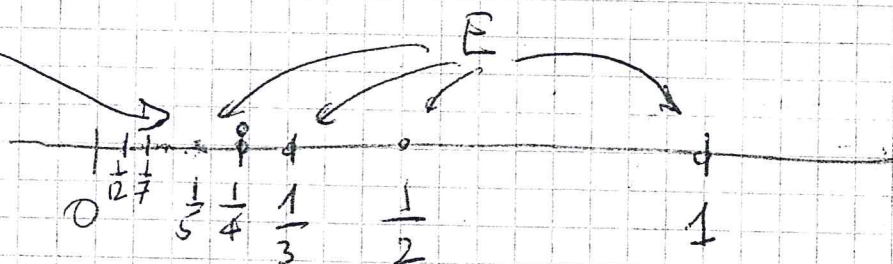
$$2) \quad \lambda \leq e \quad \forall e \in E$$

(cioè λ è un minorante)



Facciamo l'esempio (3.1): anzi, un esempio un po' diverso + differente

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n+3} \right\} \neq \emptyset$$



E è inferiormente limitato $\Rightarrow \inf E \in \mathbb{R}$

Dimo che $0 = \inf E$, come lo dimostro?

Usa la Caratterizzazione scelta in corso all'inizio della pagina:

Si mette di dimostrare:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E: x < \varepsilon$

2) $0 \leq x \quad \forall x \in E$

Si ha:

$\forall \text{ sia } x \in E; \quad \exists n \in \mathbb{N}: x = \frac{1}{n^2+3} > 0$

(dunque $x \geq 0$), che dimostra la 2).

1): Fissiamo $\varepsilon > 0$; cerchiamo $n \in \mathbb{N}$

(l'unicità) tale da

$$\frac{1}{n^2+3} < \varepsilon$$



$$n^2+3 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 3$$

se $\frac{1}{\varepsilon} - 3 \leq 0$ qualunque $n \in \mathbb{N}$

verifica (*). se $\frac{1}{\varepsilon} - 3 > 0$,

va già bene. $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 3}; \quad n = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 3} \right\rfloor + 1$

LE SERIE A TERMINI POSITIVI

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots < +\infty$$

$$\frac{5}{5} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots}_{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
 $\parallel$
 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
 $\parallel$
 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{16} + \dots$
 $\parallel$
 $\frac{1}{2}$

13

Def Una successione di numeri reali
è una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(1) = \dots$$

$$f(2) = \dots$$

$$f(3) = \dots$$

Di solito $f(n)$ si indica con a_n ,
oppure con b_n , oppure con c_n .
↑
elemento n -esimo
della successione.

Tutta la successione spesso si indica
con (a_n) , o anche con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Def Sia $N \in \mathbb{N}$, e sia (a_n) una
successione di numeri reali. La somma
parziale N -esima di (a_n) è

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

$$S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

0 0 > 0 1

Def $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \sup \{ S_N : N \in \mathbb{N} \} \quad (14.1)$

il membro destro (che è ben definito in quanto visto fino a adesso, e ha come valore $0 + \infty$ o un numero reale ≥ 0) definisce il limite che sta a sinistra.

N.B. Stiamo supponendo $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se sommiamo anche quantità negative, questa non è la def. corretta.

Def Se nella (14.1) l'estremo superiore è finito si dice che la serie converge. Se l'estremo superiore è $+\infty$ si dice che la serie diverge.

(SERIE GEOMETRICA)

Esempio

per $x > 0$.

Cosa possiamo

dire

di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

Se $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$$

$$= \sup \{ N : N \in \mathbb{N} \} = +\infty$$

La serie diverge.

Se $x > 1$: la serie diverge (cosa)

Il caso più interessante e più difficile
è $0 < x < 1$; Sia $N \in \mathbb{N}$

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^N = ?$$

Per cosa

$$1 + x + x^2 + \dots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

Da questa, trovare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$