

Lezione 4 29/9/2016 12.00-13.35

Alcune proprietà di $\mathbb{R}$. I numeri reali sono stati introdotti nella lezione 3 in modo astratto. Un modello di $\mathbb{R}$ sono i punti di una retta. $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$

Teo 1 $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Def $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$

$$\exists e \in E : a < e < b$$

Equivalentemente, dato $a \in \mathbb{R}$,

$$\text{dato } \varepsilon > 0, \exists e \in E : a - \varepsilon < e < a + \varepsilon$$

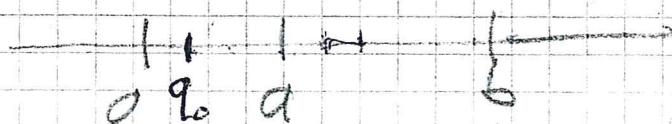


(L'oss. 1 della lezione 3 ha $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{R}$, e $\mathbb{Q}$ al posto di E : si dice che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$)

Dim (Teo 1). Se $a < 0$ e $b > 0$

basta prendere $e = 0 \in \mathbb{Q}$

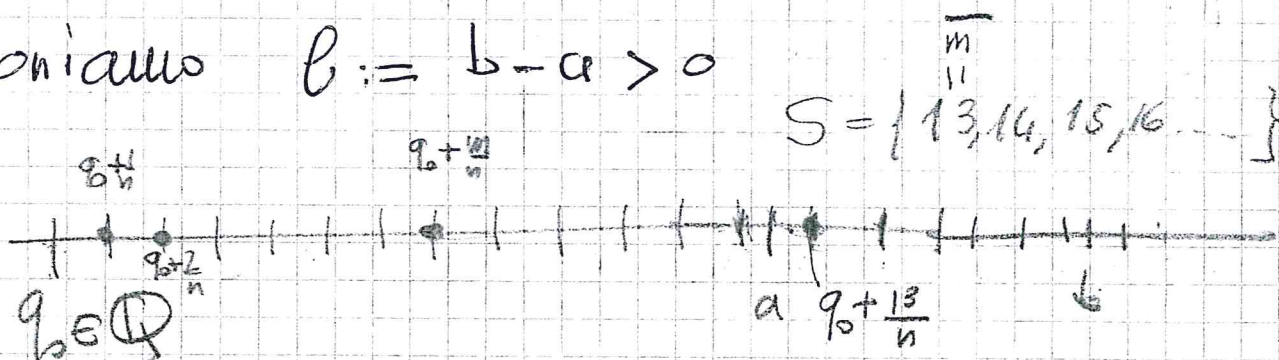
Possiamo supporre s.p.d.g. $0 < a < b$



Prendiamo $q_0 \in \mathbb{Q}$, $q_0 < a$

(vedere a casa che questo si può fare, $q_0 > 0$)

Poniamo $\ell := b - a > 0$



Prendo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} < \ell$; basta (2.1)

prendere $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\ell}$

« $\frac{1}{n}$ ampiezza del balzo che faccio a partire da q_0 »

Nota: $q_0 + \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, se $m \in \mathbb{N}$

$$S := \left\{ m \in \mathbb{N} : q_0 + \frac{m}{n} > a \right\}$$

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad \text{si}$$

$$S \neq \emptyset : \text{cioè } \exists m \in \mathbb{N} : q_0 + \frac{m}{n} > a$$

$$(a - q_0)n < m \quad (\text{basta scegliere } m \in \mathbb{N})$$

$$\text{tale che } m > n(a - q_0)$$

Della proprietà di buon ordinamento di $\mathbb{N}$ segue $\exists ! \bar{m} = \min S$ (pag 3 lezione 1)

$$\text{Definisco } e := q_0 + \frac{\bar{m}}{n}$$

$\begin{matrix} \text{pag 3, lez 1} \\ \bar{m} \in S \\ \bar{m} \leq s \quad \forall s \in S \end{matrix}$

$$\text{Dico che } e \in \mathbb{Q}, \quad a < e < b$$

$e \in \mathbb{Q}$ perché e è somma di due numeri razionali. Dimostriamo $e > a$: infatti

$$\text{dato che } \bar{m} \in S \Rightarrow q_0 + \frac{\bar{m}}{n} > a$$

$\parallel$
 e

Resta da dimostrare $e < b$. Considero

$$\bar{m} - 1 < \bar{m}, \quad \bar{m} - 1 \notin S, \quad \text{infatti}$$

$$q_0 + \frac{\overline{m} - 1}{n} \leq a \iff$$

$$q_0 + \frac{\overline{m}}{n} - \frac{1}{n} \leq a \iff$$

$$e - \frac{1}{n} \leq a \iff$$

$$e \leq a + \frac{1}{n} \stackrel{(2.1)}{<} a + b =$$

$$= a + b - a = b$$

$$\Rightarrow e < b.$$

□

ES (cora) I numeri decimali sono densi
in $\mathbb{R}$; cioè, posto

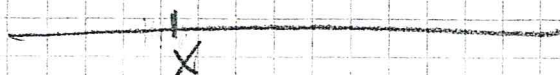
$$D := \left\{ \frac{m}{10^k} : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

allora D è denso in $\mathbb{R}$.

(Dimostrare simil
a quella del teo 1.)

Lo stesso se al posto di 10^k si considerasse 2^k .

« Il teo 1 dice ^{che} dato $x \in \mathbb{R}$ arbitrario
(o anche decimale)
poss trovare un numero razionale vicino
a x quanto voglio »



* I razionali sono sparsi un po' dappertutto in $\mathbb{R}$

Esiste un metodo utile di approssimazione di $x \in \mathbb{R}$ con decimali.

$$x = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots$$

Difficoltà: la somma può essere infinita

$\alpha_0 = [x]$ parte intera inferiore di x

$\alpha_1 \in \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}, \dots$

Ma è bene considerare l'allineamento decimale proprio di x , cioè un allineamento in cui gli α_i non sono = 9 da un certo indice in poi.

Teo 2 $\mathbb{R}$ Non è numerabile.

Cioè non esiste una applicazione iniettiva e surgettiva $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Ricordiamo invece che $\mathbb{Q}$ è numerabile (teo 4 pag 4 lemma 3)

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}$ è numerabile e denso in $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ non è numerabile

(e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è numerabile, per cui)
è denso in $\mathbb{R}$

Dni (teo 2)

Dimostrare che $[0, 1)$ non
è numerabile; da questo seguirà che
 $\mathbb{R}$ non è numerabile. Scriviamo

$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$ generica rappresentazione
di un numero reale in $[0, 1)$, tramite
allineamento decimale proprio risp
a pag 5.

Supponiamo per assurdo che
 $[0, 1)$ sia numerabile.

$$r_1 = 0, \textcircled{1}879943.$$

(7.1)

$$r_2 = 0, 9\textcircled{9}438000.$$

$$r_3 = 0, 314\textcircled{5}678987.$$

$$r_4 =$$

Dato $k \in \mathbb{N}$, posso considerare, di r_k , la k -esima cifra del suo allineamento decimale proprio, dopo la virgola.

Definisco, $y_k = \begin{cases} 5 & \text{se la } k\text{-esima} \\ & \text{cifra di } r_k = 4 \\ 4 & \text{se la } k\text{-esima} \\ & \text{cifra di } r_k \neq 4 \end{cases}$

Nella (7.1), ad esempio,

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = 5, \text{ eccetera}$$

A questo considero l'allineamento decimale ^{proprio} con ^{$\forall k \in \mathbb{N}$} definito $\forall$ la sua

k -esima cifra dopo la virgola è y_k , che dà origine a un $x \in [0, 1)$

$$x = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$$

Ma allora x è un elemento che deve comparire (una sola volta) nella lista (7.1)

Dunque $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$x = r_k$$

Dico che questo è assurdo: andiamo infatti a vedere la k -esima ^{y_k} cifra dopo la virgola, nell'allineamento decimale (proprio) di x .

$$y_k = \begin{cases} 4 & \text{se } y_k = 5 \\ 5 & \text{se } y_k = 4 \end{cases}$$

assurdo.

□