

Lezione 3

8.30 - 10.10

1

Ricapitolando: abbiamo studiato alcune proprietà di $\mathbb{N}$; usando il concetto di classe di equivalenza abbiamo costruito $\mathbb{Z}$; e poi $\mathbb{Q}$.

Abbiamo definito ora nel LK che due insiemi hanno la stessa cardinalità (sono equipotenti), e vogliamo dire che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità, cioè che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Ricordiamo che $\mathbb{Q}$ è stato definito come un insieme quoziente (vedi pag 16 lezione 2)

Teo 1 L'insieme numerabile di insiemi finiti non vuoti a due a due disgiunti è numerabile.

Teo 2 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile; più in generale il prodotto cartesiano di

14

Coll n' dero

3

• F_p é finito, $\# F_p = p-1$

—



—



Def 1 Una partizione $\mathcal{P}$ di un insieme

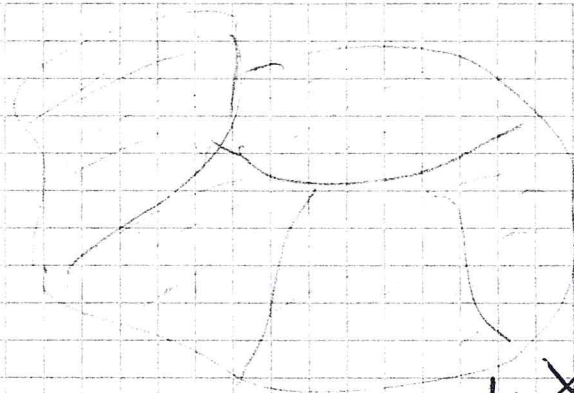
X è una collezione di sottoinsiemi

di X , ciascuno dei quali è $\neq \emptyset$,

in cui inoltre due distinti di tali

sottoinsiemi non si intersecano, e l'unione

dei quali ricopre tutto X .



ES 1

Un esempio di partizione, se su X ho
assegnato una relazione di equivalenza $\sim$,

è $\mathcal{Q}$ di pag 13 lemma 2.

la famiglia

Teo 3 Una partizione di un insieme
numerabile o è finita o è numerabile.

Teo 4 $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Dim Ricordiamo che gli elementi di $\mathbb{Q}$

sono tutti identificati con dom di equivalenza

di $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Ma $\mathbb{Z}$ è numerabile,

$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pure, dunque (Teo 2)

$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ è numerabile.

La partizione di $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

data dalla $\sim$ di pg 14 è, dal

Teo 3, o finita o numerabile.

Ma non essendo finita, è dunque

numerabile. $\square$

Risultato: « possiamo contare i numeri razionali ».

OSS 1 (l'analogo si fa per $\mathbb{N}$ e per $\mathbb{Z}$)

Se $x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$, $\exists z \in \mathbb{Q}$
 $x < z < y$

In fatti, se $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$$y = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}, \quad p', q' \in \mathbb{Z}, \quad q' \neq 0$$

$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$$

basterebbe definire $z := \frac{x+y}{2} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}}{2}$

$$= \frac{\overset{x}{p q'} + \overset{y}{p' q}}{2 q q'} \in \mathbb{Q} \quad \text{dato che}$$

$$p q' + p' q \in \mathbb{Z}, \quad 2 q q' \neq 0 \quad (2 q q' \in \mathbb{Z})$$

oss 2 Se $x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$ allora

Esistono infiniti $z \in \mathbb{Q}$ tali da $x < z < y$.

Vogliamo ora "costruire" $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

stessa cardinalità

non numerabile e con
"altre proprietà di completezza"

$\sqrt{2}, e, \pi, \dots$

16

Es $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supp. sei absurd $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N},$

$$(p, q) = 1 \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$



weil p, q sind teilerfremd

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid p^2 \quad (\text{mal da: 2 da } p^2)$$

$$\Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow p^2 = 4m$$

$m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4m \Rightarrow q^2 = 2m$$

$$\Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q \quad \text{Na allora}$$

$2 \mid p$ e $2 \mid q \Rightarrow p$ e q non possono essere
teilerfremd.

I numeri reali si possono costruire in
vari modi: 1) modo assiomatico

2) Semplici di Dedekind (richiede la nozione di
estremo superiore)

3) Completamento di $\mathbb{Q}$ nel senso degli
spazi metrici (questo richiede la
nozione di successione di Cauchy)

Faremo qualcosa su 1).

Consideriamo R_1, R_2, R_3, R_4 gli assiomi seguenti:

(R_1): su $\mathbb{R}$, $+$ (operazione di somma)
che rende $(\mathbb{R}, +)$ un gruppo abeliano
(o abeliano)

$+$ • $x + y = y + x$ commutatività

• $(x + y) + z = x + (y + z)$ associatività

$x + 0 = x$ (0 elemento neutro) ^{o identità}

$\forall x \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $-x \in \mathbb{R}$ (opposto di x) ^(univ.)

$$x - x = 0$$

(R_2) ha un'operazione $\cdot$ che gode delle
proprietà commutativa, associativa, esistente di
identità, $\forall x \neq 0$ esiste un (univ.) elemento
 $\frac{1}{x}$ tale che $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (inverso di x)

Vali per la proprietà distributiva

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$\mathbb{R}_2$ è la proprietà di corpo (o corpo) commutativo.
Ho quindi richiesti entità $+$, $\cdot$

($\mathbb{R}_3$)

$\mathbb{R}$ è munito di $\leq$ ordine totale,

(cioè $\forall x, y \in \mathbb{R}$, o $x \leq y$ oppure $y \leq x$)

per cui:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y$$

$$\text{allora} \quad x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y$$

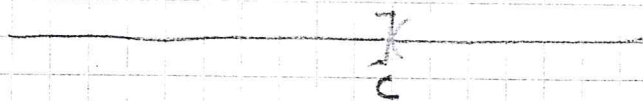
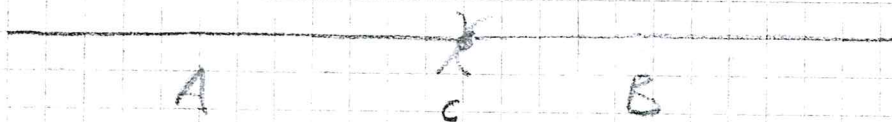
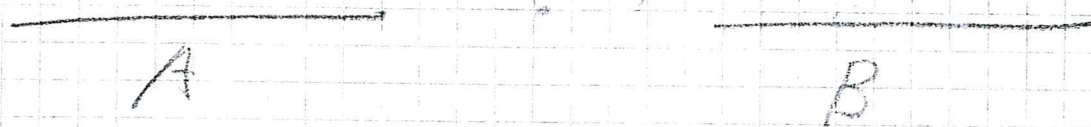
$$\forall z \in \mathbb{R}, z \geq 0 \quad xz \leq yz$$

Ho quindi richiesti $+$, $\cdot$, $\leq$

In fine, si richiede l'assioma ($\mathbb{R}_4$)

(detto di completezza): siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$
tali che $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$

allora $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ elemento separabile



Teo Se X e Y sono due insiemi e

$(X, +, \cdot, \leq)$ verifica R_1, R_2, R_3, R_4

$(Y, +, \cdot, \leq)$ verifica R_1, R_2, R_3, R_4

allora X e Y sono isomorfi (come corpi commutativi)

Nota $\mathbb{Q}$ non verifica R_4 : per vedere

questo devo esibire $A, B \subset \mathbb{Q}$ tal

che $\forall a \in A \forall b \in B \quad a \leq b$ che non posso avere "separati" da un $c \in \mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$$

non esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

