

LC 3100 35 4/2/2020 8.30 - 10.00

MERCOLEDI PROSSIMO < ZANUETTOR PRIMO 2015
10.15 - 11.45
PARAFIA SECONDO 2015
12.00 - 13.30

« Ogni integrale razionale si scrive come
combinazione lineare di funzioni razionali e di

« $\log(ax^2+bx+c)$, $\arctg(dx^2+ex+f)$
per opportune costanti a, b, c, d, e, f »

$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ P, Q pol. a coeff. reali,
 $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$, P, Q
senza radici comuni.

Come si procede

(*) cerchiamo le radici di Q e
le loro molteplicità: se r_i è
una radice reale di Q , di molteplicità m_i
allora in $\frac{P}{Q}$ ci sarà un termine di
questo tipo: $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_j}{(x-r_i)^j}$, con $C_j \in \mathbb{R}$
opportune costanti (da trovare)

(**) trovare le costanti

2/ Se $z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice

complesso di $\mathbb{Q}$, di molteplicità μ_i ,
allora in $\mathbb{P}/\mathbb{Q}$ appare un termine della forma

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_k x + \beta_k}{[(x - z_k)(x - \bar{z}_k)]^{k_i}} = \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_k x + \beta_k}{[x^2 - 2x \operatorname{Re}(z_k) + |z_k|^2]^{k_i}}$$

per opportune costanti $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x - z_k)(x - \bar{z}_k) &= x^2 - x(z_k + \bar{z}_k) + z_k \bar{z}_k \\ &= x^2 - 2x \operatorname{Re}(z_k) + \underbrace{|z_k|^2}_{\substack{\text{reale} \\ (a, +\infty)}} \\ &= \text{pol. 2° grado a coeff. reali} \end{aligned}$$

$$= x^2 - 2x \operatorname{Re}(z_k) + |z_k|^2$$

Nota

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$$

$$\bar{z} = a - ib, \quad a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

$$z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

ES

$$\int \frac{1}{(x-1)x^3} dx = ?$$

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = x^2(x-1)$$

Ricerca delle radici di Q con molteplicità:

$$r_1 = 1$$

$$m_1 = 1$$

$$r_2 = 0$$

$$m_2 = 2$$

2 radici reali 1, 0, la prima con
mult 1, e la seconda con mult 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}$$

No radici complesse.

Problema: devo trovare C_i

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}$$

$$1 = C_1 x^2 + C_2 x(x-1) + C_3(x-1)$$

$$1 = (C_1 + C_2)x^2 + (C_3 - C_2)x - C_3$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

4/

Dal principio di identità dei
polinomi $\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 = C_2 \\ C_3 = -1 \end{cases}$

$$C_2 = -1, \quad C_3 = -1, \quad C_1 = 1$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} (\dots) \quad \int \frac{1}{x^2(x-1)} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Es}} \quad (x - (1+i))(x - (1-i)) &= \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + 5x}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$z_1 = 1+i \quad \text{con mult. 2}$$

$$\bar{z}_1 = 1-i \quad \text{" " " "}$$

1 radice complessa (e la sua coniugata)
con mult. 2 e nessuna radice reale.

3

$$(2, 1) \Rightarrow$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

for appropriate constants real α_i, β_i

$$\frac{x^2 + 5}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 5 = (\alpha_1 x + \beta_1)(x^2 - 2x + 2) + \alpha_2 x + \beta_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ system of 4 eq. 4 unknowns,
linear

$$\alpha_1 = 0, \quad 5 = 2\beta_1 + \beta_2,$$

we require a case.

6/ Tutto questo si basa su 2 lemmi.

Lemma 1 (radici reali). Sia P/Q funzione razionale, $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$, P e Q senza radici comuni. Sia r radice di Q di molteplicità m .

Allora $\exists$ unica costante $c \in \mathbb{R}$

$\exists$ unica funzione razionale P_1/Q_1
 $\text{grado}(P_1) < \text{grado}(Q_1)$

con $\text{grado}(Q_1) < \text{grado}(Q)$,
tale che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c}{(x-r)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

(radici comuni)

Lemma 2 Se z è radice $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ di Q di mult. μ , allora, posto $z = a + ib$, $b \neq 0$

$\exists$ uniche costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\exists$ unica funzione razionale P_2/Q_2

con $\text{grado}(P_2) < \text{grado}(Q_2) \leq \text{grado}(Q) - 2$
tale che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha x + \beta}{[(x-a)^2 + b^2]^\mu} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

ES : $z = a + ib$

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + b^2 &= x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \\ &= (x-a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Dunque il "jetto elementare" alla fine di pag 6 è lo stesso del jetto elementare che appare nella (2.1).

Dim (Lemma 1) Per ipotesi

$Q(x) = (x-r)^m \tilde{Q}(x)$, con $\tilde{Q}$ non divisibile per $x-r$.
Si ha, per una costante c da fissare dopo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{c}{(x-r)^m} = \frac{P(x) - c\tilde{Q}(x)}{(x-r)^m \tilde{Q}(x)} \quad (7.1)$$

Dato che $\operatorname{grado}(\tilde{Q}) < \operatorname{grado}(Q)$, si ha

$$\operatorname{grado}(P - c\tilde{Q}) < \operatorname{grado}(Q).$$

Adesso scelgo $c \in \mathbb{R}$ in modo che il membro destro della (7.1) abbia le proprietà richieste da P_1/Q_1 nell'enunciato. Come scelgo c ?

Voglio che $\text{grado}((x-r)^m \tilde{Q}(x)) < \text{grado}(Q)$:

le radici di $\tilde{Q}$ non sono radici di $P - c\tilde{Q}$

perché P e $\tilde{Q}$ non hanno radici comuni.

Dunque l'unico modo è fare sì che r sia radice comune del numeratore e del denominatore del membro destro della (7.1):

basta scegliere c in $P(r) - c\tilde{Q}(r) = 0$,

cosa possibile (in modo unico) dato che $\tilde{Q}(r) \neq 0$. Con questa scelta $\perp c$

$$\frac{P(x) - c\tilde{Q}(x)}{(x-r)^m \tilde{Q}(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

e tutte le proprietà risultano verificate. $\square$

Dim (Lemma 2) Simile al Lemma 1: per ipotesi

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) \left((x-a)^2 + b^2 \right)^m,$$

$$\tilde{Q}(a+ib) \neq 0, \quad \tilde{Q}(a-ib) \neq 0, \quad (b \neq 0)$$

cerchiamo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che

$$(8.1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\alpha x + \beta}{((x-a)^2 + b^2)^m} = \frac{P(x) - (\alpha x + \beta)\tilde{Q}(x)}{((x-a)^2 + b^2)^m \tilde{Q}(x)}$$

abbia le proprietà richieste da P_2/Q_2 dell'asserto.

9. Mostriamo che $\text{grado}(P(x) - (\alpha x + \beta)\tilde{Q}(x)) < \text{grado}(Q)$

10. Impostiamo che $P(x) - (\alpha x + \beta)\tilde{Q}(x)$ abbia

Come radici $a+ib, a-ib$; con seno divisibile in $(x-a)^2 + b^2$.

11. o allora

$$\begin{cases} P(a+ib) - (\alpha(a+ib) + \beta)\tilde{Q}(a+ib) = 0 \\ P(a-ib) - (\alpha(a-ib) + \beta)\tilde{Q}(a-ib) = 0 \end{cases}$$

12. Si ottiene

$$(9.0) \quad \begin{cases} \alpha(a+ib) + \beta = \frac{P(a+ib)}{\tilde{Q}(a+ib)} \\ \alpha(a-ib) + \beta = \frac{P(a-ib)}{\tilde{Q}(a-ib)} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro nella (9.0) si ha:

$$(9.1) \quad 2ib = \frac{P(a+ib)}{\tilde{Q}(a+ib)} - \frac{P(a-ib)}{\tilde{Q}(a-ib)}$$

13. Il secondo membro è immaginario puro.

Inoltre $b \neq 0$, dunque (9.1) ha unica soluzione

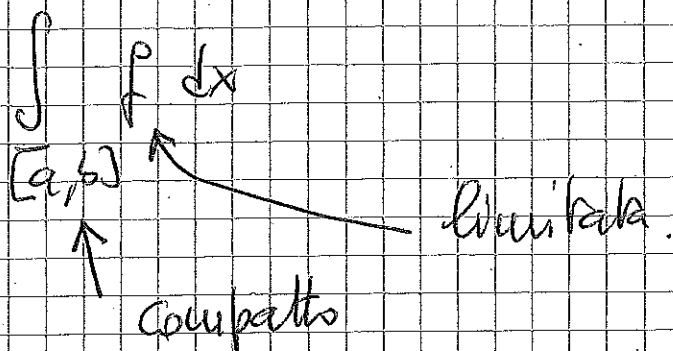
Reale α . Per trovare β , l'unica soluzione, basterà sommare membro a membro nelle (9.0).

Preli questi valori di α, β , risulta che nella (8.1), il secondo membro, numeratore e denominatore hanno un fattore comune del tipo

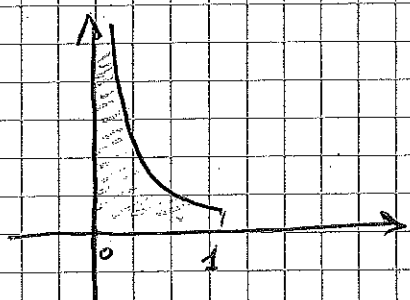
$$((x-a)^2 + b^2)^n \quad \square$$

10

Fino a adesso, abbiamo fatto

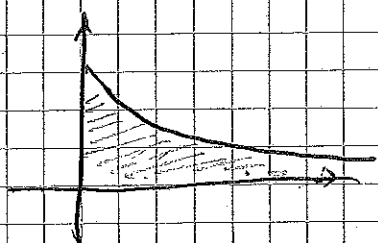


Come fare per indovinare le ipotesi?



$$\int_{(0,1]} f(x) dx = ?$$

non è limitata!



$$\int_{(0,+\infty)} f(x) dx = ?$$

non è limitata!

Cominciamo il corso $\int_a^b f(x) dx$, $a < b$,
 $[a,b]$

$f \in \mathcal{C}([a,b])$, f può non essere limitata!

esempio:

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

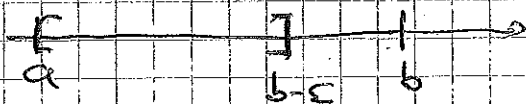


con $\alpha > 0$

11/ Notando che $f \in \mathcal{C}([a, b])$ si ha

$$f \in \mathcal{C}([a, b-\varepsilon]),$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \varepsilon < (b-a)$$



e dunque f è integrabile in $[a, b-\varepsilon]$,

però dunque parlare di $\int_{[a, b-\varepsilon]} f(x) dx$.

Def Se $\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{[a, b-\varepsilon]} f(x) dx \in \mathbb{R}$

dico che f è integrabile in tutto

l'intervallo in $[a, b)$, e ancora

l'integrale lo indicherò con $\int_{[a, b)} f(x) dx$.

Nel caso della notazione $\int_c^d f(x) dx$,

lo indicherò $\int_a^b f(x) dx$ (come sempre).

14) Conseguentemente, per fare gli integrali, si usa

Test (di Goursat): Sia $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$,

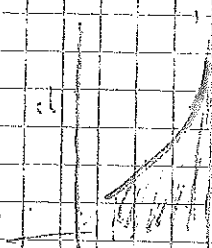
$\varphi \geq 0$, la cui esista $\int \varphi dx$, e sia

$f \in \mathcal{E}([a, b])$, $|f| \leq \varphi$. Allora $\exists \int_{[a, b]} f(x) dx$

No Dim.

Esempio

$$\frac{1}{(b-x)^\alpha}$$



$\alpha > 0$

per quali $\alpha > 0$ è integrabile su $[a, b)$?

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \varepsilon^{1-\alpha}$$

se $\alpha \neq 1$

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \ln(b-a) - \ln \varepsilon$$

se $\alpha = 1$

Da qui per $\alpha = 1$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{b-x} dx = +\infty$

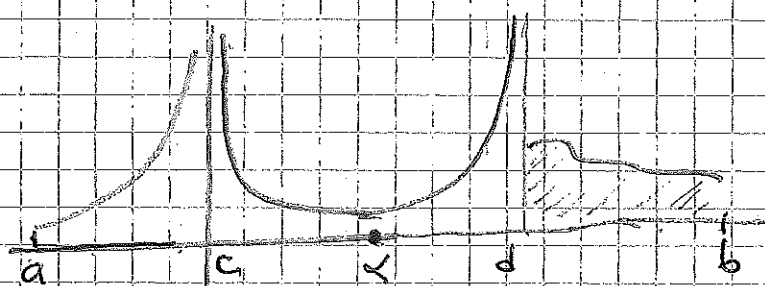
e dunque $\frac{1}{b-x}$ non è integrabile in

nessun intorno in $[a, b)$.

Lo stesso accade per $\alpha > 1$.

Ma per $\alpha \in (0, 1)$, invece si ha l'integrabilità in senso improprio:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha},$$



questa si tratta separatamente:

in $[a, c)$, in (c, d) , in $[d, b]$

per essere integ. in senso improprio:

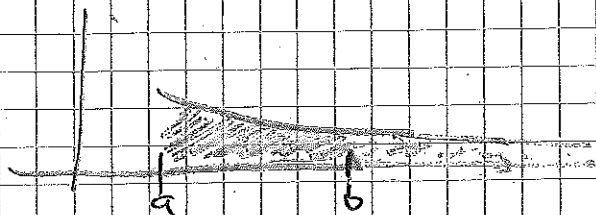
$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f dx \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^d f dx \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{d-\delta} f(x) dx \in \mathbb{R}$$

(scelto un $\alpha \in (c, d)$; il tutto non dipende da α)

Intervalli illimitati



Sia $f \in \mathcal{C}([a, +\infty))$

In particolare $f \in \mathcal{C}([a, b]) \quad \forall b > a$

Dico che f è integ. in senso improprio
in $[a, +\infty)$, e saranno $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

$$\text{e } \exists \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$$

Anche qui vale

Teo (Capitolo): se $\varphi: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

è continua, e int. in senso improprio in

$[a, +\infty)$, e $|f| \leq \varphi$, allora anche

f è int. in senso improprio in $[a, +\infty)$

13 ES

Cauchy-Satz

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \cdot b^{-\alpha+1} + \frac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \log b & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{Se } \alpha > 1 \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{R}$$

Logo $\frac{1}{x^\alpha}$ ist int. in jedem unendlichen $[1, +\infty)$

Merke: nur für $\alpha \in (0, 1]$.

□

16

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$$\Rightarrow I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$$

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^n}}_{f'(x)} \underbrace{x}_{g(x)}$$

$$f(x) = \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$g'(x) = 1$$

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$$

$$= I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

$$1 - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{2(n-1) - 1}{2(n-1)} = \frac{2n-3}{2n-2}$$