

1 Lezione 34 3/12/2020 8.30-10.00

Esercizio in corso: $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx$$

Ricordiamo la regola di integrazione

per parti vista nella lezione 33:

Teo (INTEGRAZIONE PER PARTI)

Siano f, g due funzioni, F una primitiva di f , G una primitiva di g .

Allora tutte le primitive della funzione

fG si ottengono da FG

sottraendo una qualunque primitiva di Fg . In formula

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx$$

dove il membro destro indica l'insieme delle funzioni che si ottengono sottraendo da $F(x)G(x)$ una qualunque delle primitive di Fg .

2 Es Calcolare $\int \log x \, dx$

$$\int x \sin x \, dx$$

Un'altra regola di integrazione è:

Teo (INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE)

Se f si può scrivere nella forma

$$f(x) = h(u(x)) u'(x)$$

e se H è una primitiva di h allora

$H(u(x))$ è una primitiva di f , infatti

$$\frac{d}{dx} H(u(x)) = H'(u(x)) u'(x) = h(u(x)) u'(x) = f(x)$$

dunque

$$2.1) \int f(x) \, dx = \int h(u(x)) u'(x) \, dx = \left[\int h(u) \, du \right]_{u=u(x)}$$

dove il membro destro indica

l'insieme delle funzioni che si ottengono componendo le primitive di h con $u(x)$.

3/

ES

Calcolare $\int \underbrace{(\cos x)^2}_{f(x)} \sin x \, dx$

$$f(x) = -(\cos x)^2 \frac{d}{dx} \cos x$$

$$P(u) = -u^2$$

$$u(x) = \cos x$$

$$u'(x)$$

$$P(u(x))$$

Da qui dalla (2.1) si deduce

$$\int (\cos x)^2 \sin x \, dx = \left[\int -u^2 \, du \right]_{u = \cos x}$$

$$= \left[-\frac{u^3}{3} + C \right]_{u = \cos x}$$

$$= -\frac{1}{3} (\cos x)^3 + C$$

ES

Calcolare $\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx$

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = h(u(x)) u'(x);$$

$$h(u) = \frac{1}{u}$$

Da qui dalla (2.1)

segue

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \left[\int \frac{1}{u} du \right]_{u=u(x)} \\ \uparrow = \left[\log |u| + C \right]_{u=u(x)} = \log |u(x)| + C$$

pag 15 lemma 33.

Dim. teo pag 5 lemma 33.

Vediamo che le somme inf. e sup. convergono
per $\delta \rightarrow 0^+$ a $\int_a^b f dx$.

S' va tenuto la dim. del teo pag 4 lemma
32, dove si dimostrava che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che per ogni
partizione $\mathcal{T}$ di $[a, b]$ con parametro
di finezza $\leq \delta$, allora vale

$$|S^*(f, \mathcal{T}) - S_*(f, \mathcal{T})| \leq \varepsilon (b-a)$$

(vedi pag 7 lemma 32).

5

Ma

$$S_{\star}(f, J) \leq \int_{[a,b]} f dx \leq S^{\star}(f, J)$$

Quindi

$$0 \leq S^{\star}(f, J) - \int_{[a,b]} f dx \leq \varepsilon$$

$$0 \leq \int_{[a,b]} f dx - S_{\star}(f, J) \leq \varepsilon$$

Questo è come dire che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\star}(f, J) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_{\star}(f, J) = \int_{[a,b]} f dx$$

Resto da dire che la somma di

Courby (alla fine del pg 3 let 33)

converge a $\int_{[a,b]} f(x) dx$, dove la
somma dipende da (f, J) .

6 IIa

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n S_k(x_k - x_{k-1}) = S^*(f, \mathcal{T})$$

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) = S_{\mathcal{T}}(f, \mathcal{T})$$

Dunque, dal paragrafo precedente,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

Tutte queste cose complicate, limitate
in disegni dritti, ecc., può stare forte
per dim.

(*)

$$\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

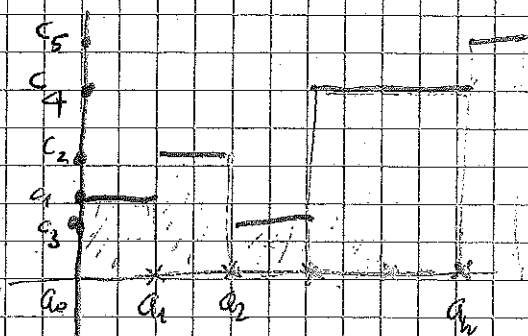
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

In realtà esiste un modo per evitare
di introdurre, e dimostrare lo stesso (*)

7

Intanto l'idea dei poligoni da dentro e da fuori, si può dire equiv. con:

Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice costante a tratti se assume un numero finito di valori e ha al più un numero finito di punti di discontinuità.



Vala il

Teo Se f è costante a tratti allora si possono trovare un numero finito di punti $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ tali che

$$f(x) = \text{cost} = c_i \quad \forall x \in (a_{i-1}, a_i)$$

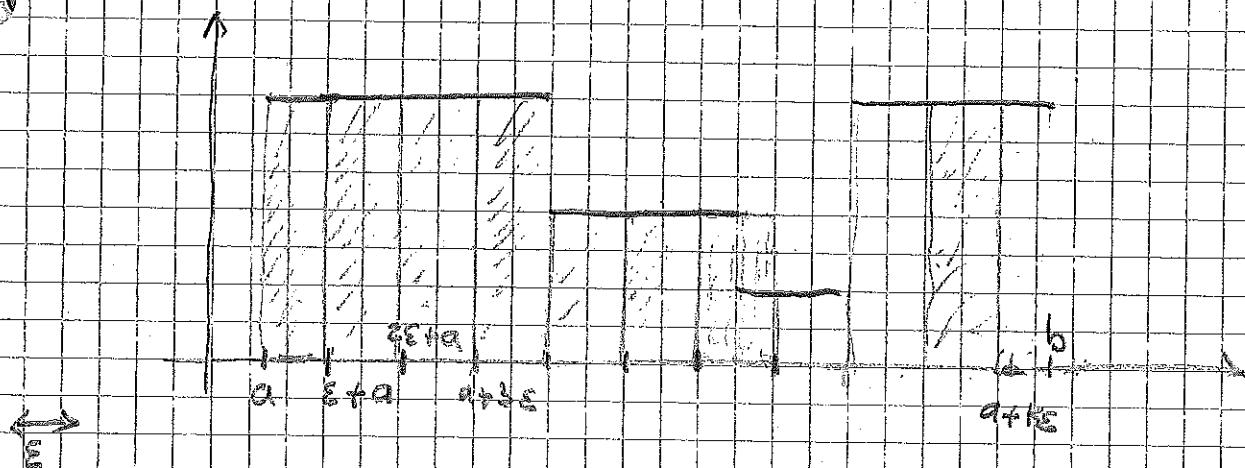
Def Per una tale f

$$\int_{[a,b]} f(x) := \sum_{i=1}^n c_i (a_i - a_{i-1})$$

8 / Oss (che permette di evitare (ξ, η) , δ ecc ecc.)
 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è costante e h.o.b., allora

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \sum_{i: a \leq \varepsilon_i < b} f(\varepsilon_i),$$

(limite nel solito senso di numeri reali)



Fatto questo, se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione,

$$* \int_{[a, b]} f(x) dx := \sup \left\{ \int_{[a, b]} g dx : g \text{ corr. a h.o.b.}, g \leq f \right\}$$

$$* \int_{[a, b]} f(x) dx := \inf \left\{ \int_{[a, b]} g dx : g \text{ corr. a h.o.b.}, g \geq f \right\}$$

e f è integrabile e $\int_{[a, b]} f dx = \int_{[a, b]} f dx$.

9 La proposizione che permette di bypassare i limiti in insiemisti è

Prop Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, allora

$$\int_{[a, b]} f dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \sum_{i: a \leq \varepsilon_i < b} f(\varepsilon_i)$$

Dim. Si usa l'oss. a pag 9.

Fissato $\varepsilon > 0$ sia $g_1(x)$ una funzione costante a tratti definita in $[a, b]$ tale che

$$(9.1) \quad g_1 \geq f, \quad \int_{[a, b]} g_1 dx < \int_{[a, b]} f dx + \varepsilon$$

Sia poi $g_2(x)$ una funzione costante a tratti definita in $[a, b]$ tale che

$$(9.2) \quad g_2 \leq f, \quad \int_{[a, b]} g_2 dx > \int_{[a, b]} f dx - \varepsilon$$

Essendo g_1, g_2 costanti a tratti, le loro val. l'oss. a pag 9:

10

dunque $\exists \delta > 0$:

$$(10.1) \quad \left| \int_{[a,b]} g_1 dx - s \sum_{i: a \leq i s < b} g_1(is) \right| < \varepsilon \quad \forall s \in (0, \delta)$$

$$(10.2) \quad \left| \int_{[a,b]} g_2 dx - s \sum_{i: a \leq i s < b} g_2(is) \right| < \varepsilon \quad \forall s \in (0, \delta)$$

Dalle (9.1), (10.1) si ricava $\forall s \in (0, \delta)$:

$$(10.3) \quad s \sum_{i: a \leq i s < b} f(is) \leq s \sum_{i: a \leq i s < b} g_1(is) < \varepsilon + \int_{[a,b]} g_1 dx$$

e dalle (9.2), (10.2) si ricava $\forall s \in (0, \delta)$:

$$(10.4) \quad s \sum_{i: a \leq i s < b} f(is) \geq s \sum_{i: a \leq i s < b} g_2(is) > -\varepsilon + \int_{[a,b]} g_2 dx$$

Dalle (9.1), (10.3) segue

$$(10.5) \quad s \sum_{i: a \leq i s < b} f(is) < 2\varepsilon + \int_{[a,b]} f dx \quad \forall s \in (0, \delta)$$

e dalle (9.2), (10.4) segue

$$(10.6) \quad s \sum_{i: a \leq i s < b} f(is) > -2\varepsilon + \int_{[a,b]} f dx \quad \forall s \in (0, \delta)$$

Dalle (10.5), (10.6) segue

$$\left| \int_{[a,b]} f dx - s \sum_{i: a \leq i s < b} f(is) \right| < 2\varepsilon \quad \forall s \in (0, \delta)$$

□

11

INTEGRALI DELLE FUNZIONI RAZIONALI

ES (coro) abbiamo imparato a fare

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx,$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Come si fa $\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$? Poi in

generale, come si calcola, per $n \geq 1$

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Dimostrare la seguente formula ricorrenza:

$n \geq 2$,

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Suggerimento: come nel caso $n=2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x^2)^n} &= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x}{(1+x^2)^n} \cdot x \dots \dots \end{aligned}$$

12 Def Si dice che f è una funzione razionale
se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$,

con P, Q polinomi a coefficienti reali

Esempio $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^5 + x + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 10}{x^2 + 12}$$

Il problema è trovare una formula
generale per il calcolo di

$$\int f(x) dx, \quad \text{con } f \text{ razionale.}$$

Tale formula esiste, e permette di integrare
 f , in linea di principio (si deve trovare
le radici di Q)

$$\int \frac{P}{Q} dx$$

Se il grado di P è $\geq$ grado di Q
possiamo eseguire la divisione,
e si vede che la parte differenziale che
resta da integrare è del tipo

$$\int \frac{P}{Q} dx \quad \text{grado}(Q) > \text{grado}(P)$$

Es $\int \frac{1}{x^3+x+1} dx, \quad \int \frac{x}{2x^2+6} dx$

Dobbiamo dare qualcosa sulle radici di Q .

Se Q ha grado n , quante radici ha?

Dal teo fond. dell'algebra, segue che

Q ha n radici complesse (contate con

multiplicità) e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è

radice, allora pure $\bar{\alpha}$ è radice

(questo perché Q ha coefficienti reali).