

Lezione 32

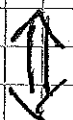
1/10/2020

12.00 - 13.30

? Copiare quali funzioni / Sono integrabili secondo Riemann?

limitate su $[a, b]$

Es f integ. (secondo Riem.) ^{su $[a, b]$}



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{I}, \mathcal{G}$ partizioni finite di $[a, b]$:

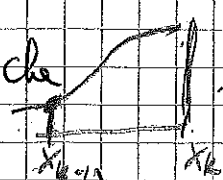
$$S^*(f, \mathcal{I}) - S_*(f, \mathcal{G}) < \varepsilon.$$

Anzi, si può prendere $\mathcal{I} = \mathcal{G}$.

Es Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Allora f è integrabile. Supponiamo

ad esempio f crescente ^{e non sia costante} (il caso decrescente è simile). Dato che f è crescente $\Rightarrow$



$$U_k = f(x_{k-1}), \quad S_k = f(x_k) \quad \forall k \geq 0$$

Fisso $\varepsilon > 0$; prendiamo $\mathcal{I}$ partizione di $[a, b]$

$$\mathcal{I} = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

take also

12

$$(2.1) \quad x_k - x_{k-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad \forall k \geq 1$$

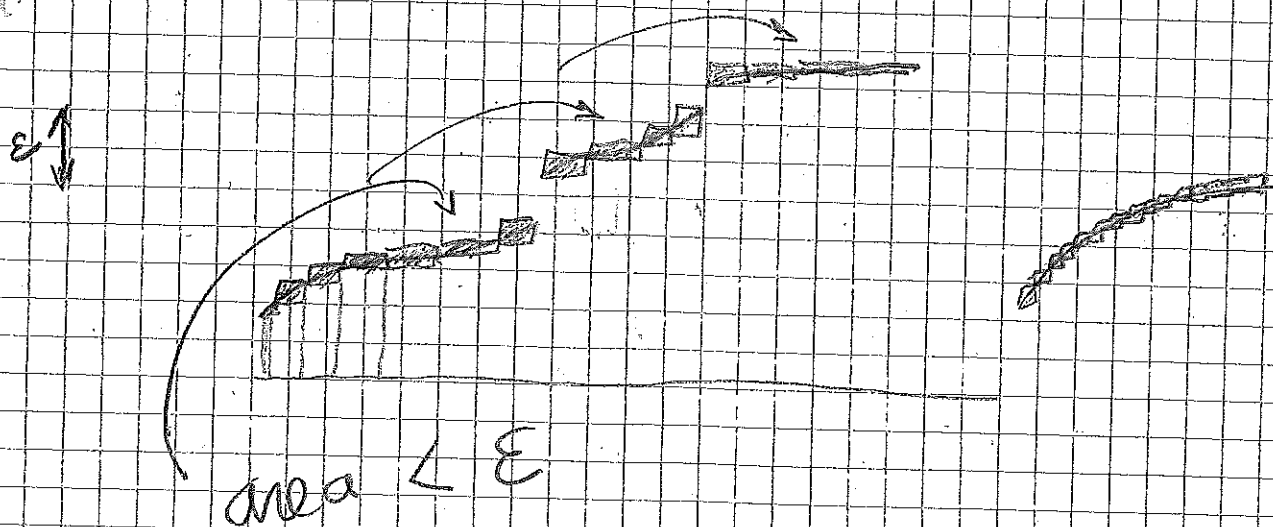
$$S^*(f, \mathcal{T}) - S_*(f, \mathcal{T}) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (S_k - \underline{c}_k) (x_k - x_{k-1}) \stackrel{(2.1)}{\leq}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (S_k - \underline{c}_k) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Dall' esercizio pu' cona a pag 1, segue f integrabile



Esempio (UNA FUNZIONE NON INTEGRABILE S.R.)

$$f(x) = \text{funzione di Dirichlet} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

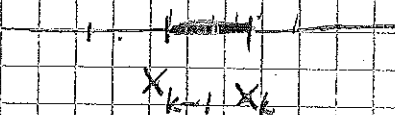
Fare vedere che $\forall \mathcal{I}$ partizione finita di $[0,1]$

$$S^*(f, \mathcal{I}) - S_*(f, \mathcal{I}) = 1$$

Suggerimento: scrivendo $\mathcal{I} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$

$$S_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f = 1$$

$$d_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f = 0$$



Anche se $0 < x_k - x_{k-1}$ è piccolissimo, in

$[x_{k-1}, x_k]$ c'è qualche numero

razionale (anzi ∞) e qualche numero

irrazionale (anzi ∞).

• Teo Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile.

Per fare la

✓ Dim Si passa attraverso L'UNIFORME CONTINUITÀ

Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua in $[a, b]$ se

$$(4.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_0, x \in [a, b], \\ |x - x_0| < \delta \quad \text{si ha} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Oss • Concetto non puntuale.

• $\delta = \delta(\varepsilon)$, non dep. da x_0 (si ha δ "uniforme" rispetto a x_0)

• Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è solo continua in $[a, b]$,

$\forall x_0$ va all'inizio della formula (4.1) e conseguentemente $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

$$\text{ES } f \in UC([a, b]) \Rightarrow f \in C([a, b])$$

Il viceversa è un teorema.

Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA

$$\text{se } \exists L \geq 0 : |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$$

$$\forall x_0, x \in [a, b], \quad \text{ES } f \in \text{Lip}([a, b]) \Rightarrow f \in UC([a, b])$$

5 Vediamo che f continua su un compatto è UC

$$\underline{\text{Te}} \quad f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in UC([a,b]).$$

Dim Per assurdo, neghiamo la (4.1):

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, x'_n \in [a,b].$$

$$(5.0) \quad |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

ho dunque due suce. $(x_n), (x'_n) \subset [a,b]$.

Da BW $\exists (n_k), \exists \bar{x} \in [a,b]$:

$$(5.1) \quad x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Consideriamo $(x'_{n_k}) \subset [a,b]$: da BW

$$\exists (n_{k_h}), \exists \hat{x} \in [a,b]:$$

$$x'_{n_{k_h}} \rightarrow \hat{x} \quad \text{per } h \rightarrow +\infty.$$

Dato che $(x_{n_{k_h}})$ è sotto suce. di (x_{n_k}) ,

dalla (5.1) segue $\lim_{h \rightarrow +\infty} x_{n_{k_h}} = \bar{x}$

Si deduce che lungo la stessa suce. (n_{k_h}) si ha

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} x_{n_{k_h}} = \bar{x}, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} x'_{n_{k_h}} = \hat{x}$$

$$(S.0) \Rightarrow |x_{n_{k_h}} - x'_{n_{k_h}}| < \frac{1}{n_{k_h}}$$

Prendendo $h \rightarrow +\infty$, si ha $|\bar{x} - \hat{x}| = 0$, cioè $\bar{x} = \hat{x}$.

$$(S.0) \Rightarrow |f(x_{n_{k_h}}) - f(x'_{n_{k_h}})| \geq \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} h \rightarrow +\infty \\ f \text{ continua in } \bar{x} \end{array} & \downarrow & \begin{array}{c} h \rightarrow +\infty \\ f \text{ continua in } \bar{x} \end{array} \\ |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon, & & \end{array}$$

assunto. $\square$

Con questi fatti a disposizione, possiamo tornare alla dim. del teorema all'inizio di pag. 4.

$$\text{Dim } f \in C([a, b]) \xRightarrow{\text{teo. precedente}} f \in UC([a, b])$$

Donque $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x', x'' \in [a, b]$

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (6.1)$$

Prendiamo $\mathcal{I}$ una partizione di $[a, b]$,

$$\mathcal{I} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \text{ tale che}$$

3

$$(7.1) \quad x_k - x_{k-1} < \delta \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$S^*(f, \mathcal{T}) - S_*(f, \mathcal{T}) =$$

$$(7.2) \quad = \sum_{k=1}^n (S_k - i_k) (x_k - x_{k-1}) \quad \text{Twelve}$$

$$S_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \stackrel{W}{=} \quad \max_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(\xi_k) \quad \forall k \in N$$

$$i_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \stackrel{W}{=} \quad \min_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(\eta_k)$$

$$\text{con } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$|f(\xi_k) - f(\eta_k)|$$



$$\text{dato da } |\xi_k - \eta_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta \quad (7.1)$$

$$\stackrel{(6.1)}{\Rightarrow} |f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon$$

$$\text{Dalla (7.2)} \quad S^*(f, \mathcal{T}) - S_*(f, \mathcal{T}) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ = \varepsilon (b-a).$$

Dall'esercizio per ogni $\varepsilon > 0$ segue f integrabile. $\square$

8 Valgono le seguenti proprietà:

• Teo Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue
(e integrabili secondo Riemann basterà)

Allora l'integrale è lineare, cioè

$$\int_{[a,b]} (f+g) dx = \int_{[a,b]} f dx + \int_{[a,b]} g dx$$

• Inoltre è 1-omogeneo, cioè $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} \lambda f dx = \lambda \int_{[a,b]} f dx$$

Infine è additivo, cioè se $c \in (a, b)$

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,c]} f dx + \int_{[c,b]} f dx$$

ES (TEOREMA DELLA MEDIA). Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

integrabile secondo Riemann. Allora:

$$\inf_{[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f dx}_{\text{media integrale di } f} \leq \sup_{[a,b]} f$$

↳ media integrale di f

9/ Suggerimento: Considerare la partizione
di $[a, b]$ più semplice possibile,

$$\mathcal{T} = \{x_0 = a, x_1 = b\}.$$

Es Se $f \geq 0$ in $[a, b]$, f integrabile

$$\Rightarrow \int_{[a, b]} f dx \geq 0$$

Es Se f è integrabile in $[a, b]$, allora $|f|$
è integrabile in $[a, b]$, e vale

$$\left| \int_{[a, b]} f dx \right| \leq \int_{[a, b]} |f| dx$$

Tornando agli enunciati di pag 8,
per dimostrarli è comodo scrivere

l'integrale come un limite, o ppiù

in senso generalizzato. Servirà generalizzare

il concetto di misurabile.

10

$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è una succ. di numeri reali. h si dice che
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = l \in \mathbb{R}$ se

$$(10.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \quad |h(n) - l| < \varepsilon$$

La struttura stiamo veramente usando in $\mathbb{N}$ affinché questa definizione di limite abbia
senso?

$$(10.1) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \text{ intorno } \overset{U}{V} \text{ di } l \quad \exists \text{ un intorno } \overset{V}{V} \text{ di } \infty \text{ in } \mathbb{N} \\ \text{tale che} \quad h(n) \in U \quad \forall n \in V \end{array}$$