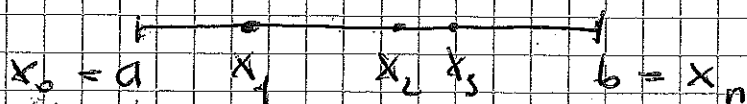


INTEGRAZIONE SECONDO RIESERMAN

Il principio di fondo è il calcolo delle lunghezze, delle aree, dei volumi.

Def Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato, $a < b$. Prendiamo un



insieme finito $\mathcal{I}$ di punti di $[a, b]$,

$$\mathcal{I} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{dove}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

La suddivisione ^{finita} di $[a, b]$ data da $\mathcal{I}$ è la famiglia degli intervalli:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$$

C'è corrispondenza biunivoca tra gli insiemi

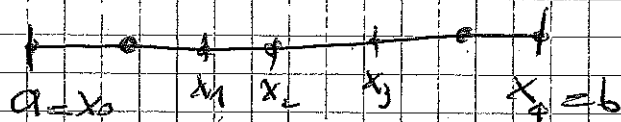
finiti di $[a, b]$ e le suddivisioni ^{finite} $\checkmark$ Posp

dunque indicen con $\mathcal{I}$ una tale suddivisione.

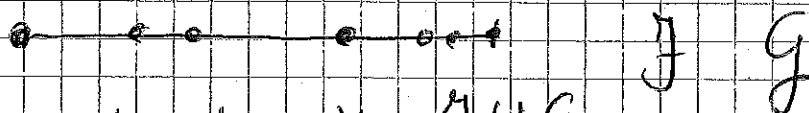
Def $\mathcal{I}, \mathcal{G}$ due suddivisioni finite di $[a, b]$

posto sempre $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{G}$ se i punti

corrispondenti di $\mathcal{I}$ sono $\subseteq$ punti corrispondenti di $\mathcal{G}$. Diremo anche che $\mathcal{G}$ è più fine di $\mathcal{I}$.



oss Date $\mathcal{I}, \mathcal{G}$ due suddivisioni finite di $[a, b]$, esiste una suddivisione finita $\mathcal{H}$ di $[a, b]$ tale che $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}, \mathcal{H} \supseteq \mathcal{G}$



Basta prendere $\mathcal{H} = \mathcal{I} \cup \mathcal{G}$

Dunque se $SF = \{ \text{suddivisioni finite di } [a, b] \}$ su SF ho $\subseteq$ simmetrica e transitiva (ordinabile)

• $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}, \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{I} \subseteq \mathcal{H}$ che verifica l'osservazione. Si dice che

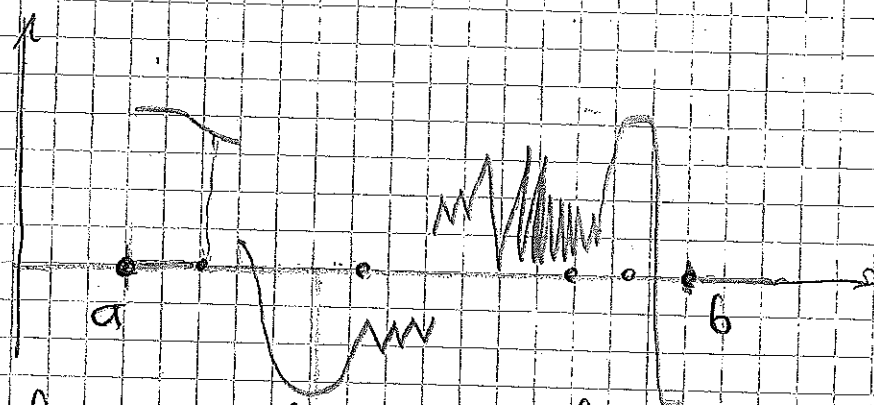
$(SF, \subseteq)$ è un insieme diretto.

Nota A volte le suddivisioni finite vengono anche chiamate partizioni finite.

Def Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

Sia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione finita di $[a, b]$. Pongo $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$v_k := \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad S_k := \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f,$$

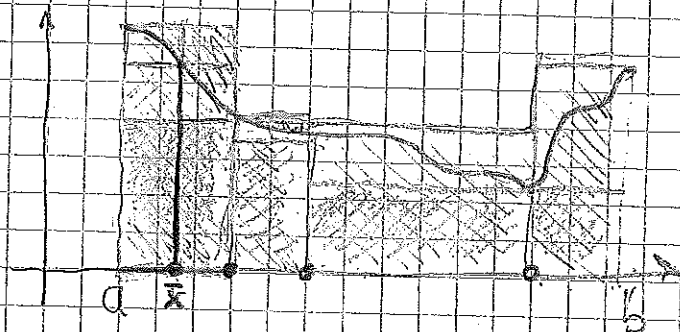


e definisco la somma inferiore di f rispetto a $\{x_0, x_n\}$,

$$S_*(f, \{x_0, x_n\}) := \sum_{k=1}^n v_k (x_k - x_{k-1}) \quad (3.1)$$

e la somma superiore di f rispetto a $\{x_0, x_n\}$

$$(3.2) \quad S^*(f, \{x_0, x_n\}) := \sum_{k=1}^n S_k (x_k - x_{k-1})$$



$n=4$

Nelle (3.1) e (3.2) non capita mai

$+\infty - \infty$, perché ciascun addendo di queste somme FINITE, è finito.

Infatti $x_k, S_k \in \mathbb{R}$ dato che f è limitata per ipotesi; inoltre $x_k - x_{k-1} \in (0, +\infty)$

perché $[a, b]$ è limitato, e dunque se

lo dividiamo in un numero finito di intervalli, ciascuno di questi ha lunghezza finita.

Lemma Siano f, g due succd. finite di $[a, b]$,

$$f \subseteq g$$

Allora

$$S_*(f, f) \leq S_*(f, g) \quad (4.1)$$

$$S^*(f, f) \geq S^*(f, g) \quad (4.2)$$

Dim. Mi basta dim. (4.1) e (4.2) quando

g ha un solo punto in più rispetto a f ,
dato che g coincide di f con un numero finito di punti in più.

Donc $\mathcal{J} = \mathcal{J} \cup \{\bar{x}\}$, car

$$\mathcal{J} = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad \bar{x} \neq x_0, x_1, \dots, x_n,$$

$$x_{k-1} < \bar{x} < x_k \quad \text{pour un seul } k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\bar{m}_1 := \inf_{[x_{k-1}, \bar{x}]} f$$

$$\bar{m}_2 := \sup_{[\bar{x}, x_k]} f$$

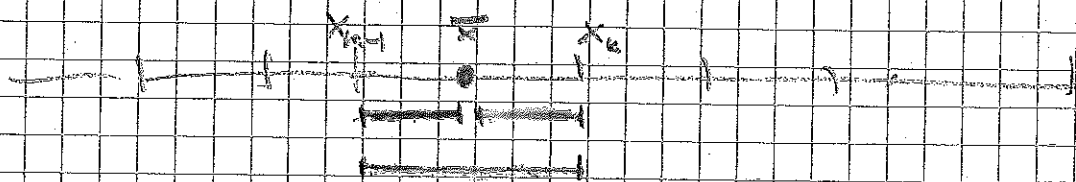
Si l'on

$$[x_{k-1}, \bar{x}]$$

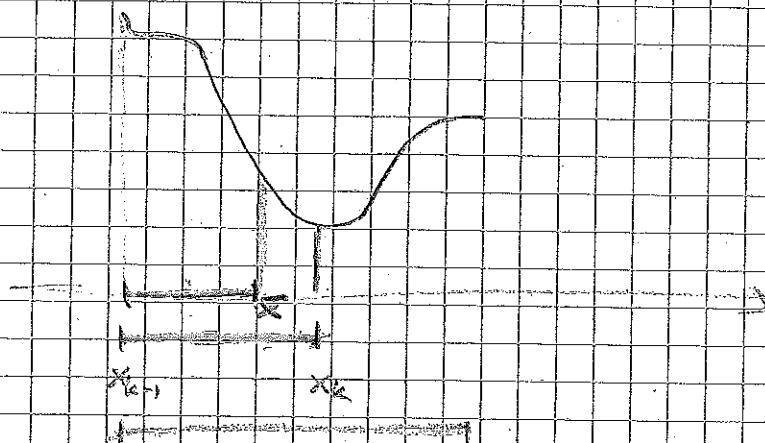
$$[\bar{x}, x_k]$$

$$(5.1) \quad \bar{m}_1 \geq i_k$$

$$\bar{m}_2 \geq i_k$$



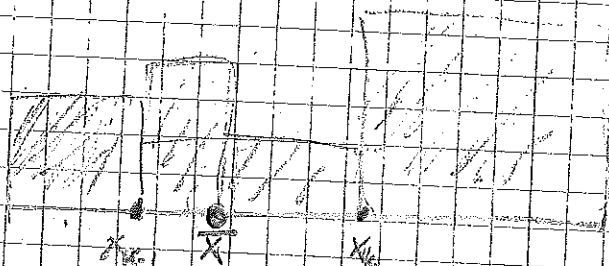
$$S_*(f, \mathcal{J} \cup \{\bar{x}\}) - S_*(f, \mathcal{J}) \stackrel{?}{\geq} 0 \quad (\text{cf (4.1)})$$



«molte cancellazioni»

$$S_x(f, g) - S_\infty(f, g) = \bar{m}_1(\bar{x} - x_{k-1}) + \bar{m}_2(x_k - \bar{x}) - c_k(x_k - x_{k-1})$$

$$= \bar{m}_1(\bar{x} - x_{k-1}) + \bar{m}_2(x_k - \bar{x}) - c_k(x_k - \bar{x} + \bar{x} - x_{k-1})$$

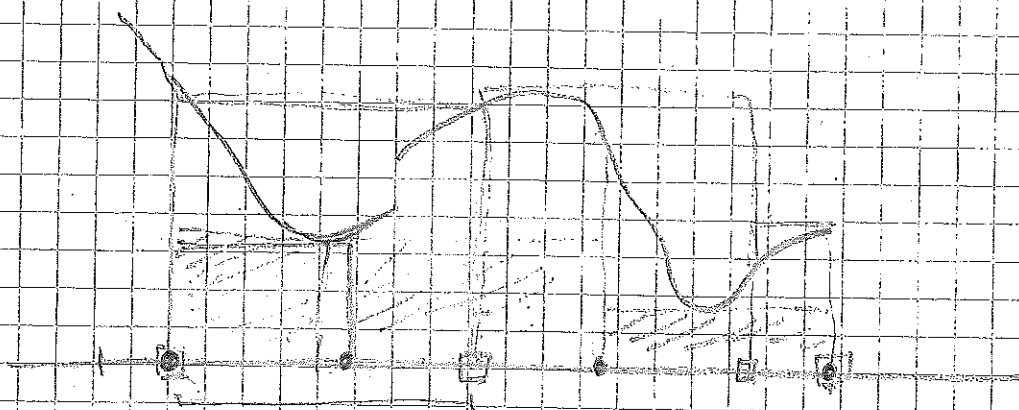


$$= \underbrace{(\bar{x} - x_{k-1})}_{\substack{\circ \\ \forall (5.1)}} \underbrace{(\bar{m}_1 - c_k)}_{\substack{\circ \\ \forall (5.1)}} + \underbrace{(x_k - \bar{x})}_{\substack{\circ \\ \forall (5.1)}} \underbrace{(\bar{m}_2 - c_k)}_{\substack{\circ \\ \forall (5.1)}} \geq 0$$

Questo dimostra la (4.1); la (4.2) si dimostra in modo simile.

□

« Aggiungere uno o + punti della partizione ha per conseguenza che aumentano (o meglio non diminuiscono) le aree dei pluriangoli sotto il grafico di f , e che diminuiscono (o meglio non aumentano) le aree dei pluriangoli sopra il grafico di f (per funzioni positive; i pluriangoli stanno sopra $\text{axe } x$). »



Lemma Siano f, g due funzioni ^{finite} continue su $[a, b]$

Allora

$$S_*(f, \mathcal{T}) \leq S^*(f, \mathcal{G})$$

D/w

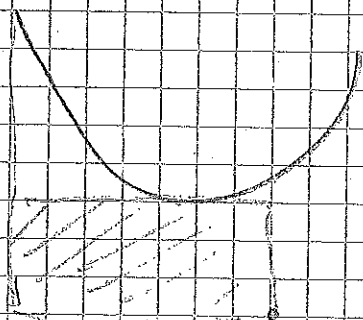
$$S_*(f, \mathcal{T}) \stackrel{\text{Lemma 18.4}}{\leq} S_*(f, \mathcal{T} \cup \mathcal{G})$$

$$(\mathcal{G}_k \leq \mathcal{S}_k \rightarrow \text{c.m.o.}) \leq S^*(f, \mathcal{T} \cup \mathcal{G})$$

$$\leq S^*(f, \mathcal{G})$$

Lemma 18.4

□



Def Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata,

(Secondo Riemann)

$$\sup_{\mathcal{T}} S^*(f, \mathcal{T}) = \int_{*, [a, b]} f dx$$

integrale
inferiore di f
su $[a, b]$

$$\inf_{\mathcal{T}} S^*(f, \mathcal{T}) = \int_{[a, b]}^* f dx$$

integrale
superiore di f
(Secondo Riemann)
su $[a, b]$.

Def Se

$$\int_{*, [a, b]} f dx = \int_{[a, b]}^* f dx$$

(8.1)

si dice che f è integrabile secondo Riemann
in $[a, b]$, e (8.1) si indica con

$$\int_{[a, b]} f dx$$