

Lezione 30

25/11/2020

10-13.30

Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $[a, b]$

$x_0 \in (a, b)$, x_0 si dice stazionario
(oppure critica) di f se

$$f'(x_0) = 0$$

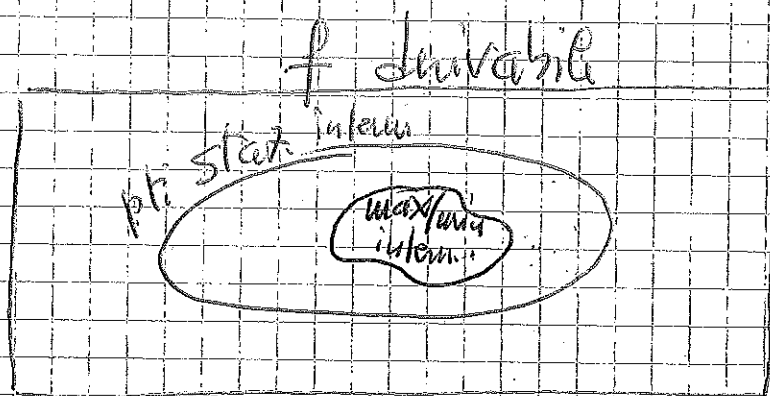
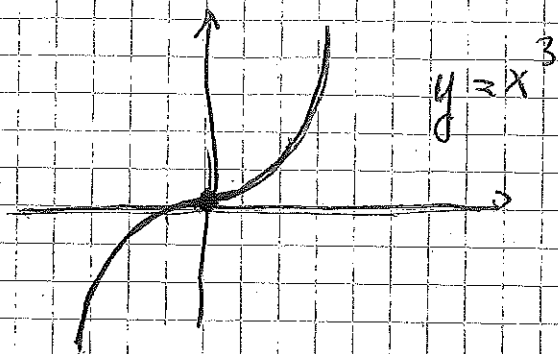
Oss i punti di max/min locali ^{d'f} interni
a $[a, b]$, sono tutti stazionari.

Def $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. x_0 si dice

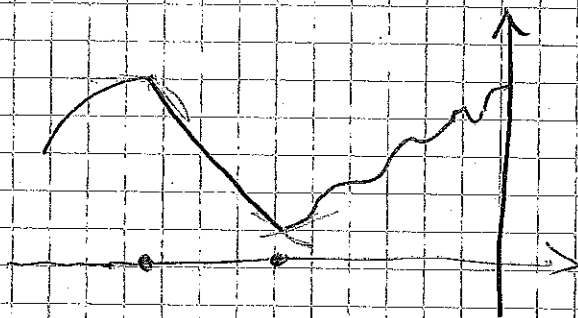
interno ad E se $\exists \rho > 0 : B_\rho(x_0) \subset E$

$$B_\rho(x_0) = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Oss Max e min ^{in generale} locale e f è derivabile
in $[a, b]$, $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$ allora
 x_0 è di max o di min. locale



Siccome è interessante la ricerca dei max/min. loc di f , diventa utile studiare $\{f'(x) = 0\}$, ma bisogna aggiungere ulteriori condizioni.



Teo Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

2 (risp. $n \geq 2$) volte con derivata continua.

Supponiamo $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$

(risp. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$)

Supponiamo inoltre $f''(x_0) > 0$

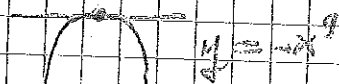
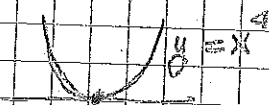
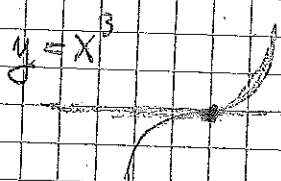
(risp. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$)



Allora x_0 è di minimo locale stretto perf.

(risp. se n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min. loc. stretto;
se n dispari $\Rightarrow x_0$ non è né max né min loc.)

Se $f''(x_0) \geq 0$ non può dedurre nulla.



Es (teo permanente del segno) Sia

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in (a, b)$,

$g(x_0) > 0$. Allora $\exists \rho > 0: g > 0$ in $(a, b) \cap B_\rho(x_0)$



• Dim Uso la formula di Taylor ⁽ⁿ⁼²⁾ (resto Lagrange):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2} \quad \forall x \in [a, b]$$

(n.s.p. n=2)

per un qualche $c = c(x_0, x) \in (a, b)$ comp. da tra x_0 e x .
 (poiché $f'(x_0) = 0$)

Dunque $f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2} \quad \forall x \in [a, b]$

• Voglio dimostrare che $\exists \rho > 0$:

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in B_\rho(x_0) \cap [a, b], x \neq x_0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2} > 0 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

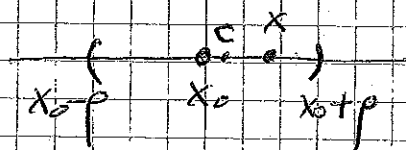
Non abbiamo inf. sul ^{segno di} $f''(c)$, però sappiamo

per ipotesi $f''(x_0) > 0$, e f'' è continua in x_0 . Dal teo. permanenza del segno

$$\exists \rho > 0 : f''(y) > 0 \quad \forall y \in [a, b] \cap B_\rho(x_0)$$

La dim. è conclusa

prendendo $x \in B_\rho(x_0) \cap [a, b]$.



□

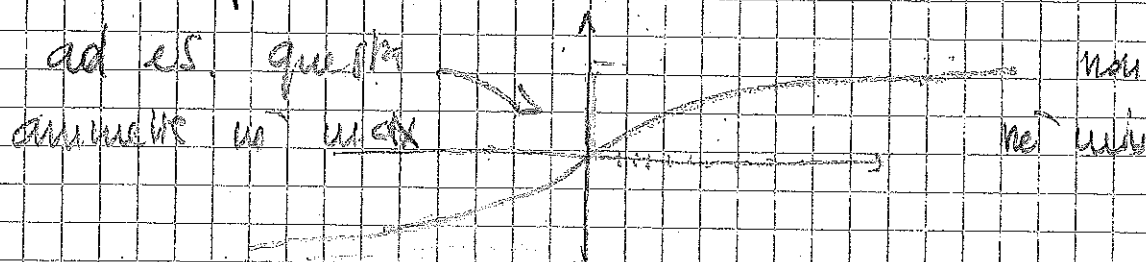
5/

Sia $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{-x+1}{x+1}\right|\right)$

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ perché composizione
di funzioni continue

? Posso dire che f ammette max/min? Non
usando tes W., perché $\operatorname{dom} f$ non
è compatto.



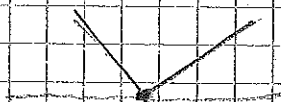
? Posso dire che f è derivabile su $\operatorname{dom} f$?

$$\operatorname{arctg} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ma $v(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ non è chiaro

che sia derivabile sul suo dominio.

A causa della presenza del $|\cdot|$.



ES CASA:

$$v \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$$

in particolare, v è derivabile nei punti di $\text{dom}(v)$ dove $v \neq 0$.

Ma v non è derivabile in $x=1$

Dunque f non è derivabile in $x=1$

$$v'(x) = \frac{\frac{1-x}{1+x}}{\left| \frac{1-x}{1+x} \right|} \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad \forall x \neq \pm 1$$

$$= \frac{1-x/(1+x)}{|(1-x)/(1+x)|} \left(\frac{-1}{1+x} - \frac{1-x}{(1+x)^2} \right)$$

$$\text{Ricordare: } \frac{d}{dz} |z| = \frac{z}{|z|} \quad \forall z \neq 0$$

$$I_{\text{ar}}(f) = ? = [0, \pi/2). \quad \text{Dunque le}$$

trovo $x_0: f(x_0) = 0$ x_0 sarà di min. assoluta

Vedo che $x_0 = 1$ è l'unico punto di min. assoluta di f .

CASA: $\max f$?

ES. 4.1.1.

Dire $\mathbb{R}$

$$f(x) =$$

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

$$\frac{\forall x \in \text{dom } f}{\sqrt{\text{ammorta}}}$$

max/min, cercare di trovarli.

Gli 0 piccoli e Gli 0 grandi in base

Supponiamo $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\uparrow$
intervallo,

f, g continue (se ho dati grafici di f, g)

Ma $x_0 \in I$. Siano

$$f = o(g) \quad \text{per } x \in I, x \rightarrow x_0$$

o

$$\lim_{x \rightarrow x_0}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^{3/2}}$$

(per cui da $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$)
tipicamente

$$g(x) = 1$$

$$f = o(1) \quad \text{per } x \in I, x \rightarrow x_0$$

non dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

$$f = o(g), \quad h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g)$$

$$\text{se } \lambda > 0, \quad f = o(g) \Rightarrow \lambda f = o(g)$$

$$\text{se } f = o(g), \quad g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$$

Sotto le stesse ipotesi di $f \neq 0$ in $f \in g$,

$$\text{scavo } f = O(g) \quad \&$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si ha: } f = O(g) \Leftrightarrow g = O(f)$$

Detto questo, osserviamo che nella formula di Taylor con resto di Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(c) (x-x_0)^n}{n!} &= f^{(n)}(c) O(|x-x_0|^n) \\ &= f^{(n)}(c) o(|x-x_0|^{n-1}) \end{aligned}$$

per $x \rightarrow x_0$.

ES

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{in } x \rightarrow 0$$

ES

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2) \sqrt{1-x^2} - x(e^{2x} - 1)}{3x(e^{-2x} - 1 + \ln(2x))}$$

Proviamo a farlo usando Taylor.

L'ordine dello sviluppo dei vari pezzi

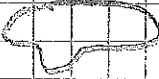
non è chiaro a priori, e lo si capisce

facendo l'errore

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \text{in } y \rightarrow 0$$

$$\sin(2x^2) = \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6) \right) \quad \text{in } x \rightarrow 0$$

$$= \left[2x^2 + o(x^2) \right] = 2x^2 + o(x^2) \quad \forall \alpha \in (2, 6)$$

Capito che l'espressione  mi serve,

o se mi basta l'espressione



in completare l'errore.

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t + o(t)$$

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \text{Reso}, \quad f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + o(w^2)$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2), \quad e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Derivata: } \sin(2x^2) \sqrt{1-x^2} - x(e^{2x} - 1)$$

$$= \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6) \right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) - x(2x + 2x^2 + o(x^2))$$

$$= -2x^3 + o(x^3) \quad \text{Sviluppo del numeratore}$$

$$2x^2 o(x^2) = o(x^4), \quad -\frac{4}{3}x^6 o(x^2) = o(x^8) = o(x^3)$$

$$\lg(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\lg(2x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{ov. denominatore} = 3x(-2x + 2x^2 + o(x^2)) + 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= 3x(2x^2 + o(x^2)) = 6x^3 + o(x^3)$$

$$\text{limite cercato} = -1/3$$

11

$$\frac{-2x^3 + o(x^3)}{6x^3 + o(x^3)} = \frac{-2 + o(1)}{6 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{2}{6}$$

ES (ASA) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} \sqrt{x} - x \sqrt{x}}{(fgx)^{5/2}}$

TEOREMA DI TIPO DE L'HOPITAL

Teo 1 Sia $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$.
Siano $f, g: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = 0$$

f, g derivabili in x_0

$$g'(x_0) \neq 0$$

Allora $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } (x_0, x_0 + \delta]}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (11.1)$

Dm

Per $x \in (x_0, x_0 + \delta]$

Scriviamo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

passando al limite per $x \rightarrow x_0$ si ottiene la (11.1) $\square$

12

Teo 2 Siano $f, g: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = 0$$

f, g derivabili in $(x_0, x_0 + \delta)$,

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

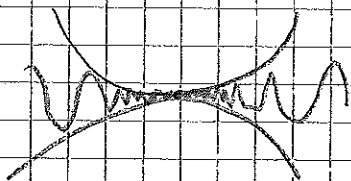
Supponiamo $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ su $(x_0, x_0 + \delta)$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{su } (x_0, x_0 + \delta)$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 0; \quad [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow [0, 1]$$

$$f \in \mathcal{C}([0, 1]), \quad f \text{ è derivabile in } (0, 1]$$

$$? \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ? \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \quad ? \quad \text{No}$$

13

Falso

$$\lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Inoltre, $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\cos \frac{1}{x}$$

$$\downarrow$$

non ha limite per $x \rightarrow 0^+$

Dunque $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Questo mostra con chiarezza che il teo 2
va in generale in un verso solo, cioè

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \not\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Def (teo 2) Per ipotesi $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (13.1)

Facciamo il caso $l \in \mathbb{R}$. La (13.1) significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \quad (13.1)$$

Ma
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (14.1)$$

per un qualche
 c compreso tra x_0 e x

dal teo di Cauchy lezione 23
 20/11/2020, pag

Poiché possiamo mettere c al posto di x nella (13.1),

deduciamo dalla (14.1):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

che equivale a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ su $(x_0, x_0 + \delta)$

□

Nota abbiamo usato una versione del teo

di Cauchy fatta sotto l'ipotesi + debole

f, g derivabili in (a, b) ; controlliamo
 a cosa che il teo di Cauchy è ancora valido.

13
Teo 3 Siano $f, g: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

f, g derivabili,

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_0, +\infty)$$

Supponiamo $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$

Supponiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Te (FORMULA DI TAYLOR GL RESTO DI PEANO)

16

100 Sia $f: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile $(n-1)$ volte in $[x_0, x_0 + \delta]$
e derivabile n volte in x_0 .

Allora, per $x \rightarrow x_0^+$, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0) + o(1)}{n!} \right) (x-x_0)^n}_{\text{RESTO DI PEANO}}$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{o(1)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$$

17

DUE PAROLE SULLE FUNZIONI CONVESSE

Def Sia $f \in C^2([a, b])$; f si dice

convessa (risp. uniformemente convessa) in $[a, b]$

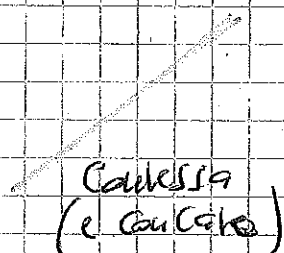
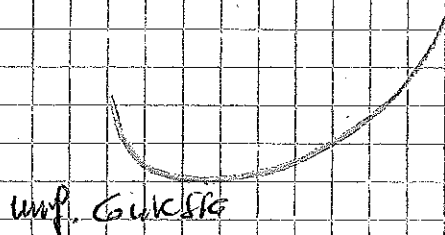
se $f''(x) \geq 0$ (risp. $f''(x) > 0$) $\forall x \in [a, b]$

(DERIVATA SECONDA DI f IN x)

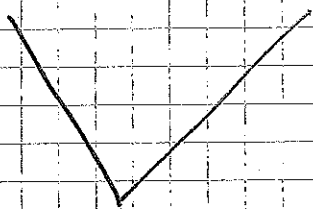
Se parliamo di f concava (risp.

uniformemente concava) dobbiamo cambiare

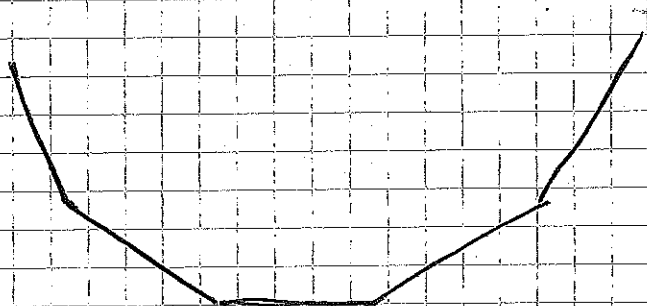
$\geq$ in $\leq$ ($>$ in $<$)



Esistono molte funzioni convesse che non sono derivabili 2 volte (anzi nemmeno 1 volta): in tal caso la def. sopra non è quella giusta, e ne viene data un'altra.



$$f(x) = |x|$$



Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\uparrow$ $\mathbb{Q}$ konvex in $[a, b]$

ke $\forall x_0, x_1 \in [a, b], \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_0)$$