

Avenemus tractatu 10th; let's recall

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)_n$$

Amos tunc $(1)_n \quad \forall n$ per inductione.

$(1)_1$ e vera? $1^2 = 1$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ si

$(1)_n \Rightarrow (1)_{n+1}$?

ipotesi $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

TESI $\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$
 $= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad (A)$

Scriviamo

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^n j^2 + (n+1)^2$$

ipotesi $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (B)$

Speriamo: $(B) = (A)$; se si ha finito

Questo equivale a dim.

$$n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2 \stackrel{?}{=} (n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$n(2n+1) + 6(n+1) \stackrel{?}{=} (n+2)(2n+3)$$

$$\parallel$$
$$2n^2 + n + 6n + 6$$

$$\parallel$$
$$2n^2 + 3n + 4n + 6$$
$$\parallel$$

Teo (induzione). Sia $E \subseteq \mathbb{N}$. Supponiamo

1) $1 \in E$

2) $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

Allora $E = \mathbb{N}$. (2.1)

Prima di fare la dim. del teo, come è stato applicato? Ad esempio, nell'esempio di pp 1, 2, chi è E ?

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$$

Nota: $E = \mathbb{N}$ è un altro modo per dire che la formula $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dici Rappresentiamo per assurdo. Supponiamo falsa la (2.1), si ha

$$N \setminus E \neq \emptyset$$

Sia $m := \min(N \setminus E)$ (è una buona definizione, grazie a quanto visto a pag 3 della lezione 1). Essendo m il minimo di $N \setminus E$, ho $m \in N \setminus E$.

Dico che $m > 1$: infatti se fosse $m = 1$, ho per ipotesi $1 \in E$, dunque $m \in E$, ma $m \in N \setminus E$, assurdo. Dunque $m > 1$.

Allora, da quanto scritto alle linee -7, -6 di pag 4, $\exists! k \in N : k+1 = m$

$$k = m - 1. \quad \text{Perché } k < m = \min N \setminus E$$

non è possibile che $k \in N \setminus E$, dunque

$k \in E$. Ma allora $m \in E$; infatti dall'ipotesi 2) segue $k+1 \in E$, e $k+1 = m$.
Dunque $m \in E$, assurdo. $\square$

Questo risultato permette l'uso delle definizioni

è ricorrente: ad esempio, come si definisce $n!$?

$$\begin{cases} 0! := 1 \\ (n+1)! = n! (n+1) \end{cases} \quad \forall n \geq 0$$

In realtà, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ bisognerebbe
scrivere

$$\begin{cases} 1! := 1 \\ (n+1)! = n! (n+1) \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

$$2! = 1! \cdot 2 = 2$$

$$3! = 2! \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ eccetera.}$$

ES per casa (disuguaglianza di Bernoulli, I)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrare per induzione su n .

ES (binomio di Newton): $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \quad (4.1)$$

dove $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ detto coefficiente binomiale.

Osservazioni: • per $n=2$ la (4.1) diventa

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a^j b^{2-j} \\&= \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2} a^2 b^{2-2} \\&= \frac{2!}{0!(2-0)!} b^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} ab + \frac{2!}{2!0!} a^2 \\&= b^2 + 2a + a^2\end{aligned}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

CASA

• Nel membro destro di (4.1) gli addendi sono $n+1$; notare che la formula inizia parte da 0

... che succede se scambiamo a e b nel membro destro? Il risultato resta lo stesso (CASA)

$$\dots \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

VELA

$$\#(\text{anagrammi di vela}) = 4!$$

LARA

$$\#(\text{anagrammi di lara}) = \text{CASA}$$

In generale, se ho una stringa di n lettere di due tipi soltanto, $\begin{matrix} \text{diciamo } H \text{ o } S \\ \text{allora} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{diciamo } H \text{ o } S \\ \text{allora} \end{matrix}$ j , allora

$$\binom{n}{j} = \#(\text{anagrammi})$$

ABAAAABBBBBBA

$$n = 12$$

$$j = 5$$

$$\Rightarrow n - j = 7$$

$$\binom{12}{5} = \binom{n}{j} = \frac{12!}{5!7!} =$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3}$$

$$= 11 \cdot 9 \cdot 8$$

Es (cosa) $\binom{n}{j}$ è anche il numero dei sottoinsiemi di j elementi di un insieme avente n -elementi.

Es (cosa) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

(TRIANGOLO DI TARTAGLIA)

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$\updownarrow$ dividendo per $(n-1)!$

$$\frac{n}{k!(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-1-k)!}$$

$\Updownarrow$ moltiplico per $n(n-1)!$

$$\frac{n}{k(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(n-k)!} + \frac{1}{k(n-1-k)!}$$

$\Updownarrow$ moltiplico per $(n-1-k)!$

$$\frac{n}{k(n-k)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \quad \text{si} \quad \square$$

Dimostrazione dell'operatore sul binomio di Newton.

Rapporto per indurre su n .

$$1) \quad (a+b)^1 \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^j b^{1-j}$$

$$\text{si} \quad a+b \quad \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = b+a$$

$$2) \quad \text{ipotesi} \quad (a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

$$\text{ten} \quad (a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}$$

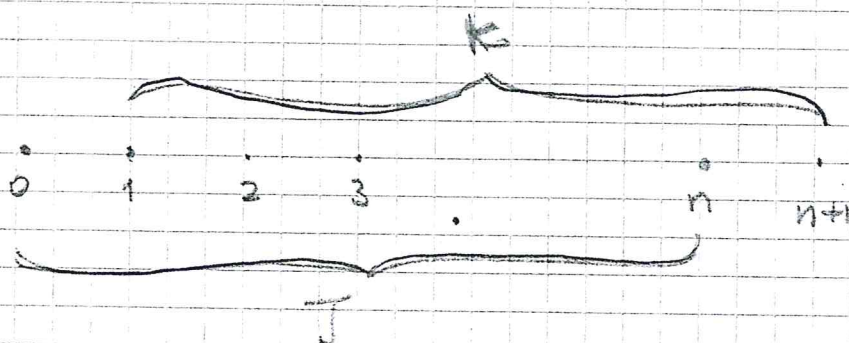
$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \quad \text{N.}?$$

$$\stackrel{\text{ipotesi}}{=} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \right) (a+b)$$

$$\left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \right) (a+b) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j}$$

$$j+1=k$$

$$(*) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j}$$



Con questo cambio di "variabile", le due somme sono su due intervalli di indici "sfasati" tra loro.

$$\underline{\text{oss}} \quad \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

dunque

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{b^{n+1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=n+1}}{a^{n+1}} = \\ & \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \end{aligned}$$

task 1

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + a^{n+1}$$

$\uparrow$
CASA

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad \text{che}$$

conclude la dim. di 2).

Una versione leggermente + generale del
principio di induzione:

Te Sia $E \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto

$$m = \min E \quad \text{Se}$$

$$1) \quad m \in E$$

$$2) \quad n \in E \Rightarrow n+1 \in E$$

$$\text{Allora} \quad E = \{ m, m+1, m+2, \dots \}$$

(cioè m rimpiazza 1 nella versione
precedente),

La dim. è la stessa di prima.

Oss (anagrammi). Se ho una stringa
di n simboli;

k_1 di un tipo

k_2 di un altro tipo

k_l di un altro tipo ancora

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$$

$$\#(\text{anagrammi della stringa}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!}$$

Ad esempio

PATERPATICA

$$n = 10, l = 6$$

$$\#(\text{anagrammi}) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 3$$

$$k_3 = 2$$

$$k_4 = 1$$

$$k_5 = 1$$

$$k_6 = 1$$

Il caso di prima $l = 2$ $k_1 = k, k_2 = n - k$

Oss Se $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la generalizzazione del binomio di Newton è:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ h_1 + h_2 + \dots + h_k = n}} \frac{n!}{h_1! h_2! \dots h_k!} x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k}$$

Il caso del binomio di Newton è: $k=2$

$$(x_1 = a, x_2 = b).$$

Questo conclude la 1ª parte sui numeri naturali; introduciamo ora i numeri ^{interi e i numeri} razionali, che si indicano con $\mathbb{Q}$.

Per fare questo, utilizzeremo il concetto di insieme quoziente rispetto a una relazione di equivalenza.

Sia X un insieme, e supponiamo di avere su X una relazione $\sim$ di equivalenza: $\sim$ una relazione binaria

- transitiva: se $x, y, z \in X$, $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$
- riflessiva: $x \sim x \quad \forall x \in X$
- simmetrica: se $x, y \in X$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

ES =

Def Sia X un insieme, $\sim$ relazione d'equivalenza su X .
Per $x \in X$, si pone

$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$, che viene chiamata
classe di equivalenza di x . $[x]$ è un sottoinsieme
di X , cioè $[x] \in \mathcal{P}(X) :=$ insieme

di tutti i sottoinsiemi di X . Nota: $x \in [x]$
dunque $[x] \neq \emptyset$.

Teo Due classi di equivalenza o sono disgiunte,
o coincidono.

Dim Supponiamo che $[x]$ e $[y]$ abbiano
un elemento in comune. Voglio dimostrare
che $[x] = [y]$. Per fare questo dimostro

$$[x] \subseteq [y] \quad (12.1)$$

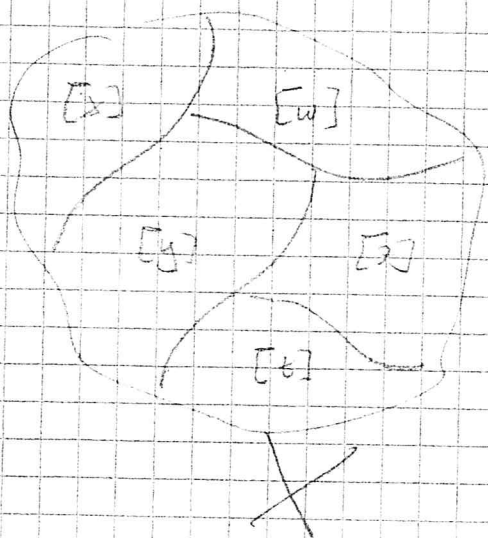
$$[y] \subseteq [x] \quad (12.2)$$

Dimostriamo ad esempio la (12.1). Sia $z \in [x]$.
Devo fare vedere che $z \in [y]$. Se $z \in [x]$,

$z \sim x$. Sia $w \in [x] \cap [y]$, dunque
 $w \sim x$, $w \sim y \Rightarrow x \sim y$. Pertanto

$z \sim x \sim y \Rightarrow z \sim y \Rightarrow z \in [y]$, che dimostra
la (12.1). La (12.2) è analoga.

Dunque X è unione di una famiglia di $\sqrt{\text{soluzioni}}$ non inter
e disgiunte



cioè

$$Q = \{ [x] : x \in X \}.$$

$$[x] \neq \emptyset$$

$$[x] \cap [y] = \emptyset \quad \text{e} \quad [x] \neq [y]$$

$$\bigcup_{x \in X} [x] = X \quad ; \quad \text{e per} \quad [x] \subseteq X$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$$

Ma anche $X \subseteq \bigcup_{x \in [x]} [x]$, perché

$$\text{e } x \in X \quad \text{e ha} \quad \dots \quad x \in [x].$$

Def Q si chiama quoziente di X rispetto
allo $\sim$, si indica con $X/\sim$

Consideriamo su $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$

la seguente relazione: dico che

$$(m, n) \sim (m', n') \text{ se } m + n' = m' + n$$

si dimostra che $\sim$ è una relazione di
equivalenza

$\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\} / \sim$ lo si può identificare con $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$(3, 5) \sim (4, 6); \quad (1, 2) \sim (10, 11) \text{ ecc.}$$

Similmente, per costruire i numeri razionali
usando l'idea di un insieme quoziente:

$$\frac{-5}{3} \sim \frac{-10}{6} \sim \frac{-25}{15} \sim \dots$$

Mettiamo su $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ la seguente
relazione di equivalenza

$$(p, q) \sim (p', q') \text{ se}$$

$$pq' = p'q$$

è una relazione di equivalenza, e l'insieme

quoziente si indica con $\mathbb{Q}$, i numeri
razionali.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots \dots \left[\frac{p}{q} \right] : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Su $\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}$ abbiamo le relazioni

$$< \quad \text{e} \quad \leq$$

(stesse proprietà che abbiamo visto su $\mathbb{N}$)

Nota (da aggiungere anche per i numeri naturali)

$\leq$ è una relazione d'ordine totale,
cioè due elementi qualunque ^{x,y} di $\mathbb{N}$

(o di $\mathbb{Z}$, o di $\mathbb{Q}$) sono sempre tra
loro confrontabili, cioè

$$0 \quad x \leq y \quad \text{oppure} \quad y \leq x$$

Si dice allora che $\mathbb{N}, \leq$ (o $\mathbb{Z}, \leq$ o $\mathbb{Q}, \leq$)

è totalmente ordinato.

« Quanti elementi hanno $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ »?

$\mathbb{N}$ è infinito

$$\{0\} \cup \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \text{ anzi } \{0\} \cup \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \text{ anzi } \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \cup \{0\} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$$

Def Siano X, Y due insiemi. Si dice

che X e Y hanno la stessa cardinalità se
 $\exists f: X \rightarrow Y$ bigettiva.

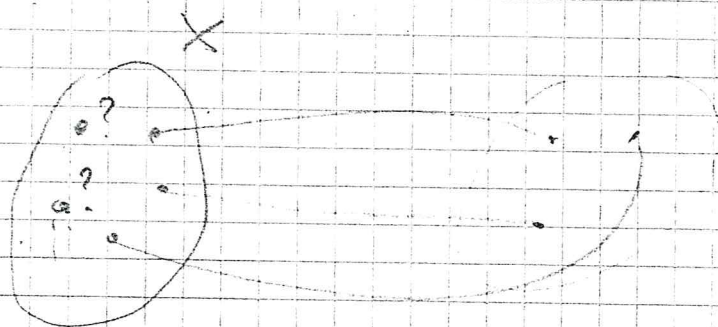
«cioè si può mettere in corrispondenza biunivoca
gli elementi di X con gli elementi di Y »

Teorema $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ hanno la
stessa cardinalità.

Si dice che $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono
numerabili (o contabili).

!!! Possa mettere in corrispondenza biunivoca,
ad esempio, $\mathbb{Z}$ con una sua parte propria
(che sarebbe $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

Questi fenomeni non appaiono per gli
insiemi con un numero finito di elementi:



$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow 2\mathbb{N} \\ x &\longrightarrow 2x \end{aligned}$$

Pe baza, dimensiunii de $\mathbb{Z}$ i contabile.

Occupamus, ora de $\mathbb{Q}$.

