

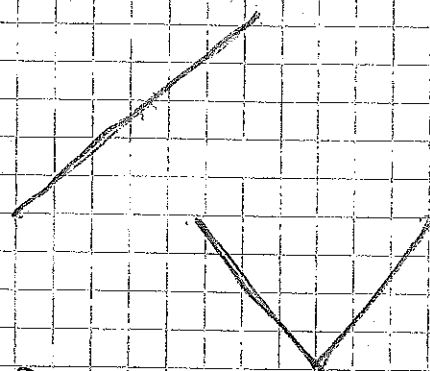
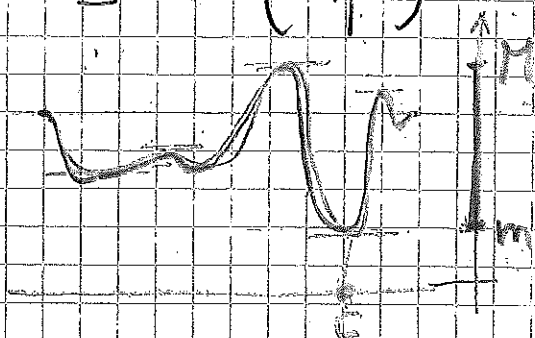
1

Lezione 28

20/11/2020

8.30-10.00

Teo (Rolle) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
 in $[a, b]$, e tale che $f(a) = f(b)$.
 Allora $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$



Dim. f derivabile in $[a, b]$
 $\Rightarrow f$ continua in $[a, b]$
 $\Rightarrow f([a, b])$ ha max e min,

Poniamo $m := \min f([a, b])$

$M := \max f([a, b])$

$\forall$ Sono 2 casi: 1) $m = M$
 2) $m < M$

2) Se $m = M \Rightarrow f = \text{costante}$, cioè
 $f(x) = m \quad \forall x \in [a, b]$
 $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Se $m < M$ (2.1)



Siano $x_m \in [a, b] : f(x_m) = m$

$x_M \in [a, b] : f(x_M) = M$; $x_m \neq x_M$

Dico che non è possibile $\{x_m, x_M\} = \{a, b\}$

In fatti se fosse così $\Rightarrow f(a) = f(b) = m = M$

in contraddizione con (2.1). ipotesi

Diunque o x_m o x_M non è un estremo di $[a, b]$.

Supponiamo ad esempio $x_m \in (a, b)$. Allora $f'(x_m) = 0$

per il Corollario pag 9 lezione 26.

Nel caso $x_M \in (a, b)$, ottengo $f'(x_M) = 0$ grazie all'analogo del Cor. pag 9 lezione 26, enunciato per il punto di massimo. $\square$

3

Teo (Cauchy) Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabili in $[a, b]$. Allora

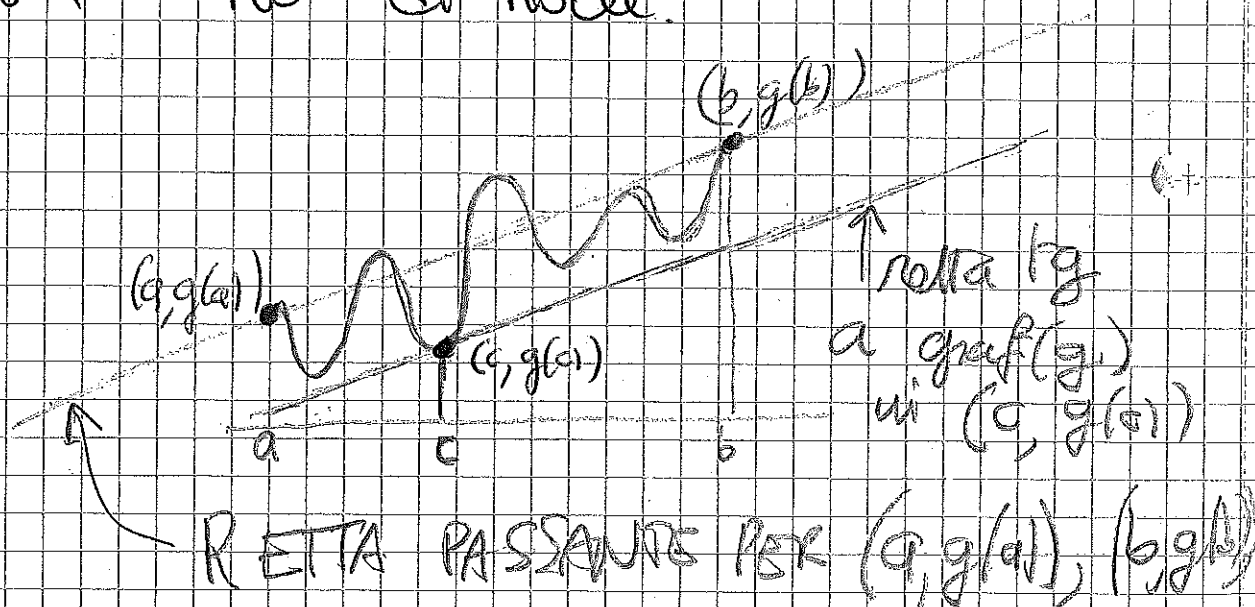
$$(3.1) \quad \exists c \in (a, b): f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

Cor (Lagrange). Se in particolare

$$f(x) = x \quad \exists c \in (a, b): g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Qui nessuna ipotesi sul valore di g in a e b .

Altamente, se succede $g(b) = g(a)$ si ritrova Teo di Rolle.



4/ Dim. teo di Cauchy.

Introduciamo $\forall x \in [a, b]$

$$F(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

Allora F è derivabile in $[a, b]$
(perché f, g lo sono per ipotesi)

Inoltre $F(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a))$

$$F(b) = f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a))$$

Dunque $F(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$

$$F(b) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$$

$$\Rightarrow F(a) = F(b)$$

Possiamo applicare teo Rolle a F

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0. \quad \forall a$$

$$F'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$

e dunque $F'(c) = 0$ diventa la tesi (3.1).

□

5/ Passiamo ora a un risultato che
useremo spesso nel corso del libro,

la cui dim. si basa sul teo.
di Cauchy, e che è un'ampia gene-
ralizzazione del Cor. di Lagrange.

Questo risultato può servire ad esempio
per fare il libro pag 71. lezione 24.

Teo (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

f derivabile n volte in $[a, b]$.

Allora $\exists c \in (a, b)$:

$$(6.1) \quad f(b) = \left\{ f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \\ = \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}$$

Oss 1 In particolare, se $n=1$ si trova $\checkmark$ (che lo (6.1):

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

cioè LAGRANGE.

Oss 2 $f^{(j)}$ indica la derivata j -esima di f .

$$(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$$

7/

OSS 3 Il membro destro della (6.1) si chiama resto di Lagrange di ordine n . La quantità tra parentesi $\{ \dots \}$ nel membro sinistro della (6.1) si chiama POLINOMIO DI TAYLOR di f DI ORDINE $n-1$, "CENTRATO" in a .

OSS 4 La formula (6.1) vale anche scambiando b con a .

OSS 5 Nella (6.1) non c'è richiesta che a e b siano vicini tra loro.

8

Esercizio

$$b \leftrightarrow x$$

$$a \leftrightarrow x_0, n=3$$

$$\begin{aligned} \text{Sen } x &= \left\{ \text{Sen } x_0 + \cos x_0 (x-x_0) - \frac{\text{Sen } x_0 (x-x_0)^2}{2!} \right\} \\ &= -\cos(c) \frac{(x-x_0)^3}{3!} \quad \text{con } c \text{ compreso} \end{aligned}$$

tra x e x_0 .

$$\text{Se } x_0 = 0$$

$$\text{Sen } x - x = -\cos(c) \frac{x^3}{6}$$

con c compreso tra 0 e x .

$$\text{Sen } x = x - \cos(c) \frac{x^3}{6} \quad (8.1)$$

$$\frac{d}{dx} \text{Sen } x = \cos x, \quad \frac{d^2}{dx^2} \text{Sen } x = -\text{Sen } x, \quad \frac{d^3}{dx^3} \text{Sen } x = -\cos x$$

$$\begin{aligned} (8.1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \cos(c) \frac{x^3}{6}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \cos(c) \frac{x^2}{6} \right] = 1 \end{aligned}$$

(limite su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

9/ la (8.1) è

$$(9.1) \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \cos\left(\frac{c}{x}\right) \frac{x^2}{6} \quad \forall x \neq 0$$

questa è una versione quantitativa
del limite notevole $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$

ES

Per quale $\alpha \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^\alpha} \quad \text{limite} \neq 0? \quad ?$$

$$\alpha = 2$$

Riflettere per casa

$$\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^\alpha} = \frac{-\cos(c) \frac{x^2}{6}}{x^\alpha} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^\alpha} \stackrel{(9.1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(c) \frac{x^2}{6}}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos(c)}{6} x^{2-\alpha} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos(c) x^{2-\alpha} \right)$$

• c sta tra 0 e x (o tra x e 0)

$\alpha = 2$ limite = $-\frac{1}{6}$

$\alpha \in (0, 2)$ limite = 0

$\alpha > 2$ da indapare.