

Lezione 24 12/11/2020

8.15-10.

1

Ricevimento oggi ore 10.00.

Esercizio pag 18 lezione 23: poiché f è invertibile, in particolare è iniettiva e dunque $f(a) \neq f(b)$. Possiamo

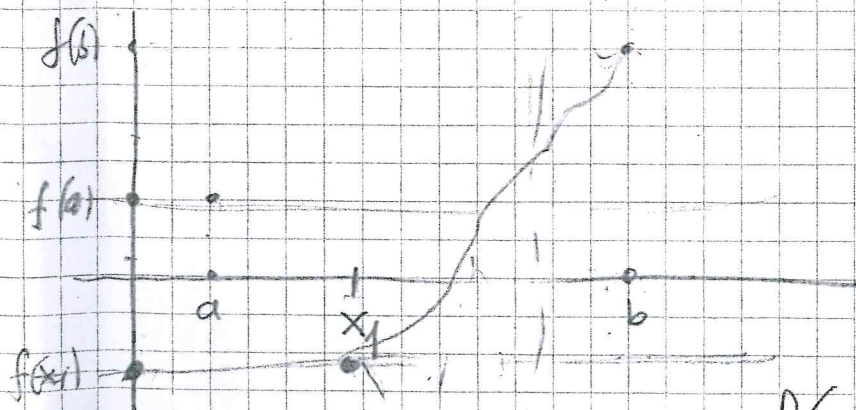
Supporre senza perdita di generalità

$$f(a) < f(b)$$

(dato che se $f(a) > f(b)$ il ragionamento sarebbe simbo.).

Prendiamo $x_1 \in (a, b)$. Si ha

$$f(x_1) \neq f(a), \quad f(x_1) \neq f(b)$$



Vi sono tre casi possibili: 1) $f(x_1) < f(a)$
2) $f(x_1) > f(b)$
3) $f(a) < f(x_1) < f(b)$

Supponiamo il 1° caso, $f(x_1) < f(a)$

Audiamo a vedere la restrizione di

$$f \text{ su } [x_1, b], \quad \hat{f} = f|_{[x_1, b]}$$

Si ha: $\hat{f}$ è continuo su $[x_1, b]$

Dunque dal teo lemma 23 pag 1

(dei valori intermedi) necessariamente

$\hat{f}$ assume $\forall$ tutti i valori compresi tra

$\hat{f}(x_1)$ e $\hat{f}(b)$. Ma $f(a)$ è uno

di questi: dunque

$$\exists x \in (x_1, b) : \hat{f}(x) = f(a)$$

Poiché $x \neq a$, ho un assurdo
(perché f non sarebbe iniettiva)

Un ragionamento simile si fa nel
caso 2): (fare la casa).

Deduciamo che solo il caso 3) è possibile, da

$$x_1 \in (a, b) \Rightarrow f(a) < f(x_1) < f(b)$$

Questo non è ancora due che f è strettamente crescente: Sia $x_2 \in (a, b)$, x_2 scelta per dila di generalità, possiamo supporre $x_1 < x_2$. Adesso applichiamo la 1ª parte della dimostrazione all'intervallo (x_1, b) (al posto di (a, b)) e deduciamo

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b).$$

E questo dimostra che f è strettamente crescente. $\square$

L'Ultimo Teorema (sulla teoria delle funzioni
«o meglio, sulla teoria delle funzioni continue definite in $[a, b]$ ») da informazioni sulla
«regolarità» della funzione inversa.

Teo (di Continuità della funzione inversa)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- continua
- invertibile.

Allora l'inversa di f è continua (su $f([a, b])$).

Dim Poiché f è continua e invertibile,

l'esercizio di pg 18 appena fatto

garantisce che f è o strettamente crescente
o strettamente decrescente. Supponiamo ad

esempio che f sia strettamente crescente.

Quindi $f(a) < f(b)$, e

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

$$\text{per } \inf f = f(a)$$

$$\max f = f(b)$$

e f , essendo continua, ha in

immagine $[f(a), f(b)]$ (teo valori intermedi,
pag 1 lezione 23).

Dimostrar

$$f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

continua, strett. crescente e invertibile

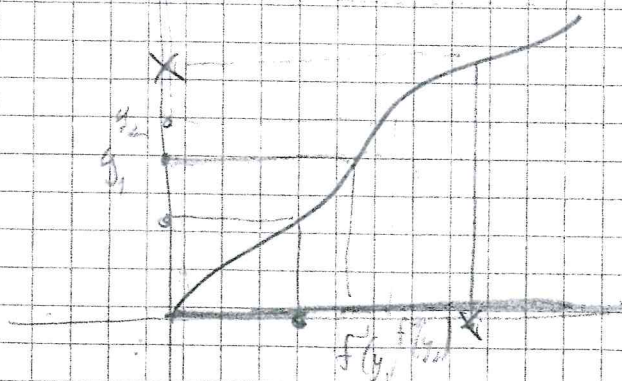
Sia f^{-1} l'inversa di f (non c'entra niente con $\frac{1}{f}$)

$f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$. Dico che f^{-1} è strett. crescente, cioè

$$y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$$

$$y_1 < y_2$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$



$$f(f^{-1}(y_1)) = y_1$$

$$f(f^{-1}(y_2)) = y_2 \quad \text{caso}$$

Deduco $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$, $\text{im}(f^{-1}) = [a, b]$

e f^{-1} è strett. crescente. Applicando il teo 16 lezione 23 a f^{-1} , si deduce f^{-1} continua.

Studiare il carattere della serie:

6

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\underbrace{\sqrt[3]{n^5}}_{a_n}}$$

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dato che

$$(6.1) \quad 1 \leq 2 + \sin n \quad (\leq 3)$$

Dunque la serie o converge o diverge ($+\infty$)

Inoltre le due diseg. nella (6.1) mi
 dicono, ^{dal confronto,} che il carattere della serie
 è lo stesso del carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}} = (*)$$

$$\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}} \geq \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}-1}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

Dal confronto $(*) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = +\infty$

$\sum \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{per } \alpha \in [0, 1]$, e qui $\alpha = \frac{2}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\frac{8x^2 \cos(2x) - 2 \log(1+4x^2)}{7x^2 \operatorname{tg}(x^4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\dots}{\dots} \right)$$

$$\text{in } (0, +\infty) = E$$

$$\lim_{t \rightarrow 0}$$

$$\frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$$

$$\text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{w \rightarrow 0}$$

$$\frac{\log(1+w)}{w}$$

$$= 1$$

$$\text{in } (0, +\infty)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0}$$

$$\frac{e^z - 1}{z}$$

$$= 1$$

$$\text{in } (0, +\infty)$$

$$8x^2 \cos(2x)$$

$$-$$

$$2$$

$$\frac{\log(1+4x^2)}{4x^2}$$

$$\cdot 4x^2$$

$$7x^6$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x^4)}{x^4}$$

$$= \frac{8x^2 \left(\cos(2x) - \frac{\log(1+4x^2)}{4x^2} \right)}{7x^6 \frac{\operatorname{tg}(x^4)}{x^4}}$$

$$7x^6$$

$$\frac{\log(x^4)}{x^4}$$

$$= \frac{8}{7} \frac{1}{x^9} \frac{\cos(2x) - \frac{\log(1+4x^2)}{4x^2}}{\frac{\log(x^4)}{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$= \frac{8}{7} \frac{1}{x^9} \frac{\cos(2x) - 1 + 1 - \frac{\log(1+4x^2)}{4x^2}}{\frac{\log(x^4)}{x^4}}$$

$$= \frac{8}{7} \frac{1}{x^9} \frac{4x^2 \left[\frac{\cos(2x) - 1}{4x^2} \right] + 1 - \frac{\log(1+4x^2)}{4x^2}}{\frac{\log(x^4)}{x^4}}$$

$$\sim \frac{8}{7} \frac{4x^2 \left[-\frac{1}{2} \right] + 1 - \frac{\log(1+4x^2)}{4x^2}}{x^4}$$

da continuare con altri termini +
raffinati.

$$= x^2$$

$$1+x^2$$

Dare un esempio di funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

discontinua in tutti i punti, con $|f|$ continua in tutti i punti.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

funzione di Dirichlet, ^è non continua in ^{ogni} $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

E dunque questa f non risolve l'esercizio.

Ma una sua piccola modifica si

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f è non continua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dunque $|f|$ è una costante, e dunque è continua in ogni punto.