

Lezione 23

11/11/2020

10-13,30

1

Teo abbiamo visto che una funzione continua  $f$  definita in un compatto  $\mathbb{R}$  è limitata e ammette max e min.

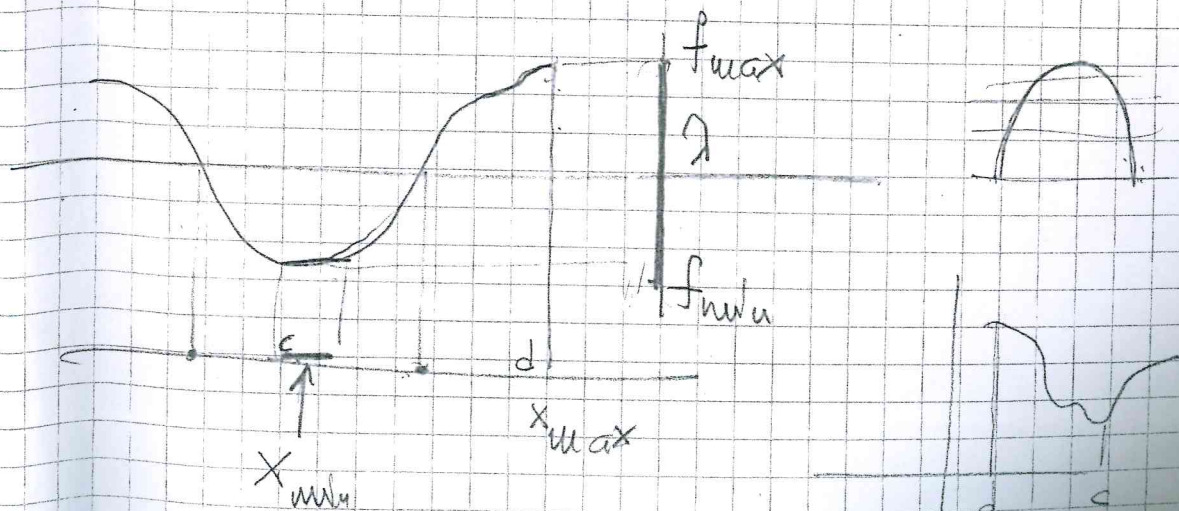
Vediamo adesso che "manda intervalli in intervalli". Più precisamente

Teo (dei valori intermedi) Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  assume tutti i valori <sup>compresi</sup> tra il suo valore minimo e il suo valore massimo.

oss posso parlare di valore minimo

e valore massimo? Sì, grazie

al teorema di Weierstrass (lezione 22)



12  
Dati. Siano  $c \in [a, b]$ ,  $d \in [a, b]$ :

$$f(c) = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$f(d) = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$c, d$  esistono dal Teo di Weierstrass (ieri)

Possiamo supporre  $c \leq d$ , senza perdita di generalità. Abbiamo dunque

$$a \leq c \leq d \leq b \quad (2.1)$$

Vi sono ora due casi:

1)  $f(c) = f(d)$

2)  $f(c) < f(d)$

1) accade  $\Leftrightarrow f = \text{costante}$

In tal caso il teorema è vero in modo ovvio.

Possiamo allora metterci nel caso 2),  
dunque  $c \neq d$ , e per la (2.1)

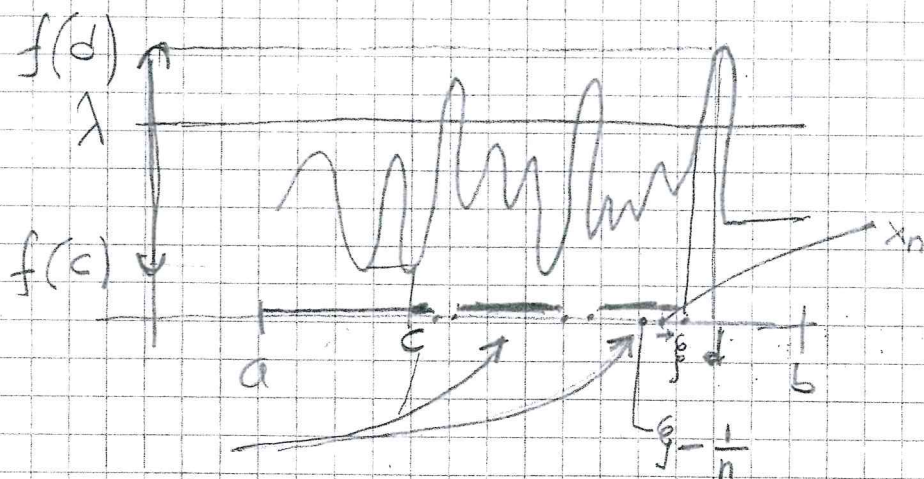
abbiamo

$$a \leq c < d \leq b$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \lambda \in (f(c), f(d)) \quad f(c) < \lambda < f(d)$$

$$\exists \xi \in (c, d) : f(\xi) = \lambda$$



$$E := \{x \in [c, d] : f(x) < \lambda\} \subseteq [a, b]$$

$$a \leq \xi := \sup E \leq b < +\infty$$

?  $\xi$  è ben definito? Sì, poiché  $E \neq \emptyset$ ,  
dato che  $c \in E$  (dato che  $f(c) < \lambda$ ).

Dico che  $f(\xi) = \lambda$ . Dimostrerò infatti  
 $f(\xi) \leq \lambda$ ,  $f(\xi) \geq \lambda$ .

Dalla def. di estremo superiore, segue che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E : f \geq x_n > f - \frac{1}{n},$$

cioè

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [c, d], \quad f(x_n) < \lambda, \quad x_n > f - \frac{1}{n}$$

Ho costruito dunque una succ.  $(x_n) \subseteq [c, d]$

convergente a  $f$ . Dato che  $f$  è continua  
in  $[a, b]$ , dunque <sup>anche</sup>  $\forall$  in  $f$ , per cui

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(f)$$

Dalla diseg.  $f(x_n) < \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,

passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si deduce

$$f(f) \leq \lambda \quad (4.1)$$

Resta da dimostrare che  $f(f) \geq \lambda$ .

Dico che  $f < d$ . Infatti dalla (4.1)

$$\text{segue} \quad f(f) \leq \lambda < f(d) \Rightarrow f(f) < f(d)$$

e pertanto  $f < d$ ,  
dalla (3.1)

"C'è un ordine di sptto tra  $\vartheta$  e  $d$ ", +  
precisamente

$$(\vartheta, d] \neq \emptyset$$

Uso ancora la continuità di  $f$  in  $\vartheta$ ,  
in particolare da

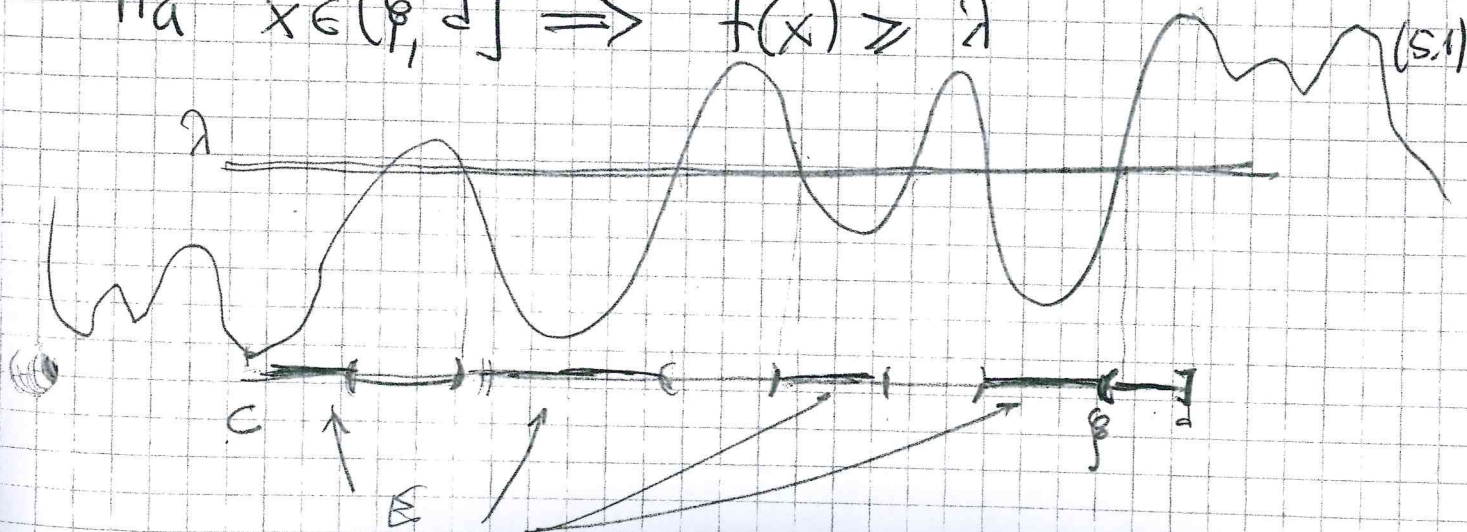
$$\lim_{x \rightarrow \vartheta} f(x) = f(\vartheta) \text{ in } [a, b]$$

segue (lemma di restrizione,  $E = [a, b]$ ,  $\vartheta = \bar{x} \in E$ ,  $L = (\vartheta, d]$ )  
 $\vartheta \in \bar{E}$

$$\lim_{x \rightarrow \vartheta} f(x) = f(\vartheta) \text{ in } (\vartheta, d] = L$$

(non stiamo dicendo altro che il  
limite destro di  $f$  in  $\vartheta$  è  $f(\vartheta)$ )

$$\text{Ma } x \in (\vartheta, d] \Rightarrow f(x) \geq \lambda$$



Prendendo il limite destro di  $f$  (cioè

il limite in  $(\xi, \eta]$ ) nella (5.1)

deduco

$$f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) \geq \lambda$$

↑  
limite "pieno"

↑  
limite destro

« Quando passo al limite <sup>o al limite destro, al limite, al limite,</sup> le disuguaglianze  
strette <sup>possono diventare</sup> diventano larghe, e le  
disuguaglianze larghe restano larghe »

«

$$f([a, b]) = [f_{\min}, f_{\max}]$$

$$= [f(a), f(b)] \Rightarrow$$

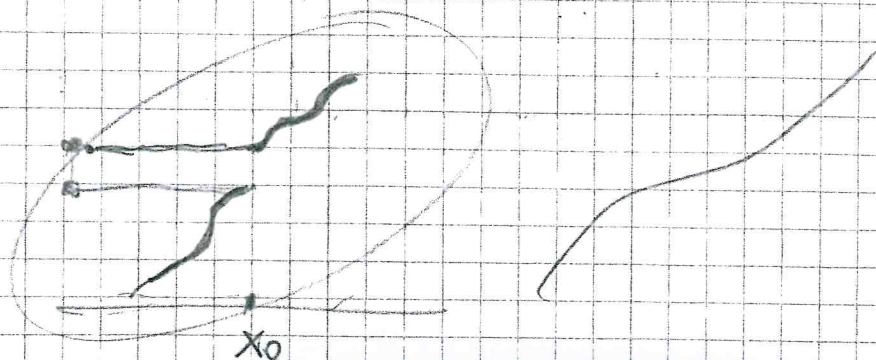
Def Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice che  $f$   
è <sup>strettamente crescente</sup> monotona crescente (o non decrescente) su  $I$

$$\text{e } \forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Per cosa cosa vuol dire monotona  
decrescente (o non crescente) <sup>su  $I$</sup>  e  
monotona strettamente decrescente.

Per le funzioni monotone, la  
situazione è abbastanza chiara: se  
 $f$  è monotona,  $x_0 \in I$ , allora  
o  $f$  è continua in  $x_0$ , oppure  
« in  $x_0$  deve saltare »



« Per  $f$   $\in$  monotona in  $I$  (cioè  $f$  è monotona crescente, o monotona decrescente in  $I$ ) allora ammette limite sinistro e limite destro finiti in ogni punto di  $I$  »

Cioè  $\forall x_0 \in I = (a, b)$

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  su  $(a, x_0)$  (limite sinistro  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ )

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  su  $(x_0, b)$  (limite destro  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ )

e in  $x_0$ , se ad esempio  $f$  è monotona  $\checkmark$

$$-\infty < \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) < +\infty$$

e  $f$  è continua in  $x_0$

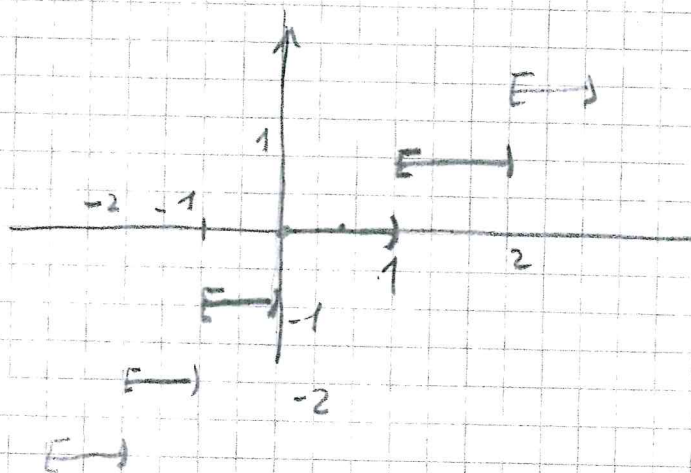
$\Leftrightarrow$  questi due limiti coincidono

Conseguenza di Lemma di Weierstrass (1) e Lemma dell'ordine (3)

Il motivo dell'abbastanza di  $f$  2  
 è che ci sono funzioni monotone,  
 ad esempio crescenti, piuttosto insolite:

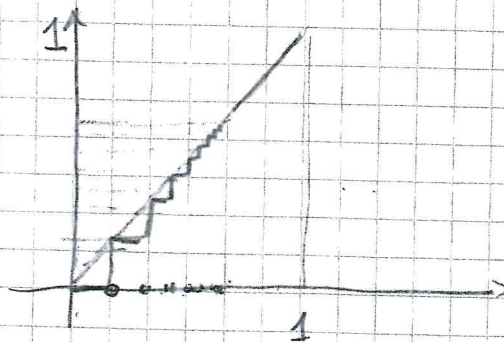
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$$

$$\text{Im } f = \mathbb{Z}$$



Vi sono infinite parti in cui  $f$  non è  
 continua: tutti gli interi

•  $\exists f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona crescente <sup>(limitata)</sup>  
 con infinite parti in cui non è continua?



Esempio Esiste  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

limitata

strettamente  
monotona crescente

non continua su tutti  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ . Come  
fare? Considerare una numerazione di  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$$

(ricordarsi che abbiamo dimostrato  
che  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$  è numerabile)

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}: q_i < x} \frac{1}{2^i}$$

sui limiti destro e sinistro

11

Quanto scritto a pag 8V è conseguente del  
intervallo

Teo Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

monotona crescente. Supponiamo

1)  $\sup E < +\infty$

2)  $\sup f(E) < +\infty$

3) posto  $s := \sup E$ , allora  $s \notin E$ .

Allora  $\exists \lim_{x \rightarrow s} f(x) = \sup f(E)$  (11.1)

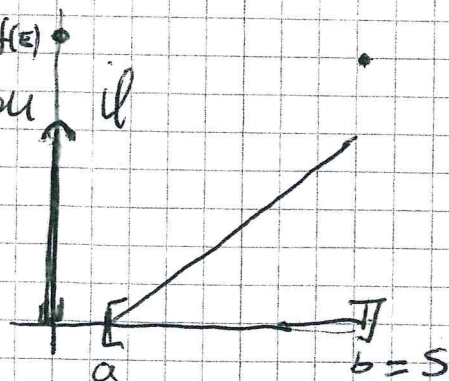
Per caso:  $s \in E$ , in modo che il limite in (11.1) è definito  
Per caso Come mai serve l'ipotesi 3)?

Come mai questa situazione non va bene:

$E = [a, b] \ni s$

$\sup f(E)$   
f con il

seguente grafico:



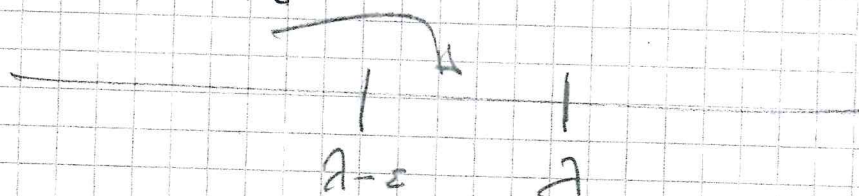
Come mai la (11.1) non  
è verificata in questo caso?

$E = [a, b)$  invece  
andrebbe bene

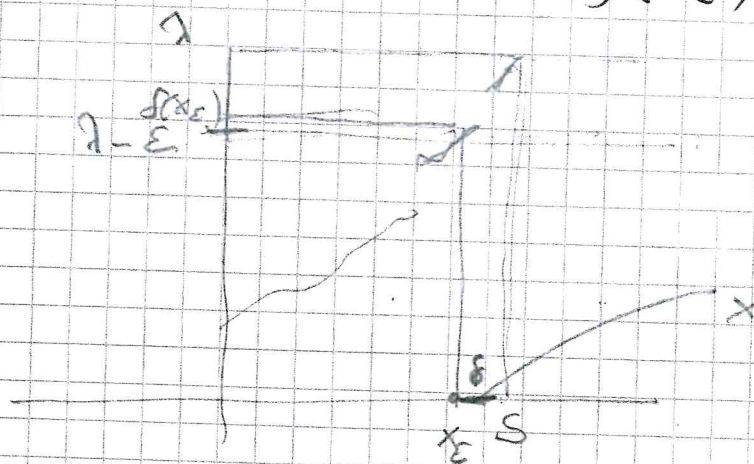
12  
 Motare la analogia con il lemma fondamentale delle successioni monotone.

Dm  $\lambda := \sup f(E) < +\infty$ . Dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in f(E) : y > \lambda - \varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E : \lambda - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < \lambda$$



$$x_\varepsilon \in E, \quad s \notin E \quad \Rightarrow \quad \delta := s - x_\varepsilon > 0$$

Dico che

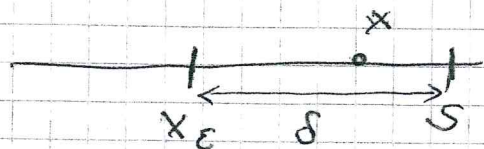
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = s - x_\varepsilon : \quad \forall x \in E, \quad \underline{|x - s| < \delta}$$

$$\Rightarrow \underline{|f(x) - \lambda| < \varepsilon}.$$

Se con questa scelta di  $\delta$ , vale quanto sottolineato in blu, allora  $\lambda = \lim_{x \rightarrow s} f(x)$  su  $E$ .

13  
Sia dunque  $x \in E$ ,  $|x-s| < \delta = s - x_\varepsilon$

Me kque  $x > x_\varepsilon$



Poichè  $f$  è crescente, abbiamo

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon \quad (13.1)$$

$$\text{Inoltre } f(x) \leq \lambda. \quad (13.2)$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo dim. che

$\forall \varepsilon > 0$  trovo  $\delta$  esattamente  $= s - x_\varepsilon > 0$

talè che  $\forall x \in E$ ,  $|x-s| < \delta$

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon,$$

dato che (13.1) + (13.2)

$$\lambda - \varepsilon < f(x) \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$$

□

Da questa kque che se  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$   
è monotonica crescente, allora  $\exists x_0 \in (a,b)$

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  finite,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad e$$

se vale  $=$

$f$  è continua in  $x_0$  (e viceversa).

Posto

$$S_f := \{ x \in (a, b) : \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \}$$

potremmo chiamare  $S_f$  l'insieme dei  
punti di discontinuità di  $f$  (costituito  
da punti dove  $f$  ha un salto).

Es (cosa):  $S_f$  è al più numerabile.

Te (continuà delle funzioni monotone)

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona  
crescente. Se  $f$  assume tutti i valori  
compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ , cioè

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \quad (14.1)$$

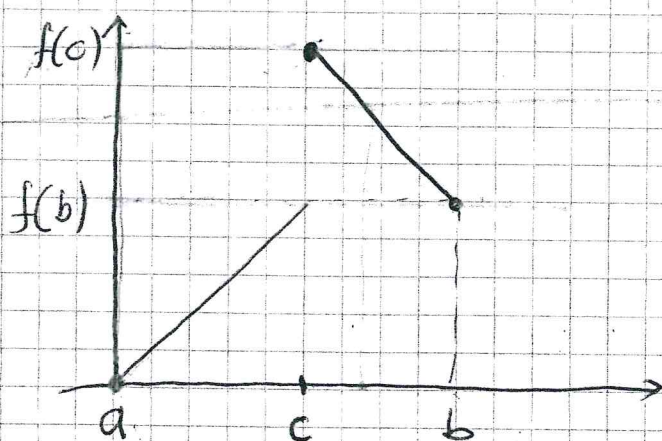
allora  $f$  è continua in  $[a, b]$ .

oss Se togliamo l'ipotesi di monotonia di  $f$  nell'enunciato del teorema, il teo diventa falso: c'è un buon esempio

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  che assumono

tutti i valori tra il <sup>minimo</sup> valore e il valore massimo,

ma discontinua.



Dni del teorema: devo dimostrare che

$$\forall t \in (a, b) \quad f(t) = \lim_{x \rightarrow t} f(x) \text{ in } [a, b].$$

Questo equivale a <sup>(due ore)</sup>  $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = f(t)$  in  $[a, t]$

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow t} f(x) \text{ in } (t, b]$$

Dimostriamo ad esempio

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow t} f(x) \quad \text{in } [a, t)$$

Applico il teo a pag 11 con

$$E = [a, t)$$

$$s = t \notin E$$

e deduco

$$(16.1) \quad \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \sup \{ f(x) : a \leq x < t \}$$

Dato che  $f$  è crescente

$$\forall x \in [a, t) \quad \text{abbiamo } f(x) \leq f(t)$$

Passando all'estremo superiore su  $x \in [a, t)$

ottengo dunque

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \stackrel{(16.1)}{=} \sup_{x \in [a, t)} f(x) \leq f(t)$$

$$\text{Questo mi dice } f(t) \geq \lim_{x \rightarrow t^-} f(x)$$

$$\text{Resta da dimostrare che } f(t) \leq \lim_{x \rightarrow t^-} f(x)$$

Supponiamo per assurdo

$$f(t) > \lim_{x \rightarrow t^-} f(x)$$

Prendiamo allora

$$\lambda \in \left( \lim_{x \rightarrow t^-} f(x), f(t) \right)$$

Per avere l'assurdo, basta far vedere che  $\lambda$  non è un valore assunto da  $f$ . Notiamo che  $\lambda \in (f(a), f(b))$ : infatti

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < \lambda < f(t) \quad \dots \quad (17.1)$$

e il fatto che  $f$  è crescente

$$f(a) \leq \lim_{x \rightarrow t^-} f(x), \quad f(t) \leq f(b).$$

Vediamo dunque che  $\lambda$  non è un valore assunto da  $f$ . Cominciamo

$$\text{con } x \in [a, t): \quad f(x) \leq \sup_{z \in [a, t)} f(z) = \lim_{z \rightarrow t^-} f(z) < \lambda, \quad \text{dunque } z \notin [a, t)$$

18

$\lambda$  non è della forma  $f(x)$  per qualche  
 $x \in [a, t)$ .

Se poi  $x \in [t, b]$  anche qui faremo  
vedere che  $\lambda$  non è della forma  $f(x)$ .

Abbiamo  $f(x) \geq f(t) > \lambda$   
 $\uparrow$   
dalla (17.1).

Ne segue che non c'è alcun  $x \in [a, b]$   
tale che  $f(x) = \lambda$ , e questo dimostra  
l'asserto.

□

Esempio (difficile): sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

continua e invertibile. Allora  $f$  o  
è strettamente crescente, o  $f$  è  
strettamente decrescente.