

Lezione 22

10/11/2020

12.-13.30

Esercizi 1), 2), 3), in corso.

Esercizio: fare vedere che le ipotesi del teorema
pg 8 lezione 21 non si possono indebolire.

Dimo (co. pg 8 lezione 21, di WEIERSTRASS)

1° passo: vediamo che f è limitata,
cioè $f([a, b])$ è un sottoinsieme limitato
di $\mathbb{R}$, cioè che $\exists K \geq 0$ tale che

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b],$$

cioè $\exists K \geq 0$ tale che

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in [a, b]$$

Supponiamo per assurdo che f non sia limitata,
lunque o f non è limitata superiormente
o f non è limitata inferiormente. Supponiamo
ad esempio che f non sia limitata
superiormente (il caso in cui f non è limitata
inferiormente avrà una dim. simile).

Diunque $\forall k \geq 0 \exists x \in [a, b] \quad f(x) > k$.

In particolare $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$.

Abbiamo costruito una successione $(f(x_n))_n$

in la quale $f(x_n) \rightarrow +\infty$

Guardiamo la successione $(x_n) \subset [a, b]$;

dato che $[a, b]$ è compatto (BW),

$\exists (x_{n_k})$, $\exists \underline{x^*} \in [a, b]$:

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x^*$$

Nota che $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$.

Per ipotesi f è continua in $[a, b]$; cioè f è
continua in ogni punto di $[a, b]$; dato che

$x^* \in [a, b]$, in particolare f è continua in x^* .

Allora, ricordando la caratterizzazione sequenziale

della continuità di f in x^* , necessariamente

$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(x^*)$. Ne segue, dalla unicità

del limite, $+\infty = f(x^*)$, essendo però
 f a valori reali.

Dunque f è limitata.

• Nota La stessa dimostrazione funziona per

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua, K compatto di $\mathbb{R}$

Ad esempio $K = [0, 1] \cup [2, 3]$ va bene.

Adesso vediamo che $f([a, b])$ ammette

• massimo (massimo valore) e minimo (minimo valore).

Da quanto appena visto, $f([a, b])$ è limitato, cioè

$$\sup f([a, b]) \in \mathbb{R}$$

$$\inf f([a, b]) \in \mathbb{R}$$

• Voglio fare vedere che l' $\inf$ è un minimo e che il $\sup$ è un massimo. Facciamo

ad esempio vedere che $\inf f([a, b]) = \min f([a, b])$

(essendo la dimostrazione che $\inf f([a, b]) = \max f([a, b])$ molto simile). Chiamiamo

$$i := \inf f([a, b])$$

Siccome f è limitato, $i \in \mathbb{R}$. Delle proprietà
 dell'estremo inferiore, $\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in f([a, b])$
 tale che $i \leq y_n < i + \frac{1}{n}$. Dato che y_n
 è nell'immagine di f , $\exists x_n \in [a, b]$:

$$f(x_n) = y_n. \quad \text{Mostriamo che}$$

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i$$

Inoltre per BW $\exists x_{n_k}, \exists \bar{x} \in [a, b]$

$$x_{n_k} \longrightarrow \bar{x}$$

$$\text{Per } f(x_{n_k}) = y_{n_k} \longrightarrow i$$

Essendo f continua in $\bar{x}$, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$.
 Per l'unicità del limite,

$$(4.1) \quad f(\bar{x}) = i$$

Ma allora $\bar{x}$ è un punto di minimo di
 f , e $i = \min f([a, b])$. $\square$

oss Anche nella seconda parte della dim,
 nulla cambia e si suppone
 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua, K compatto di $\mathbb{R}$.

Esercizio (corsa) Sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, K

compatto. Supponiamo che f verifichi

$$\forall x_0 \in K \quad (5.1) \quad f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{in } [a, b]$$

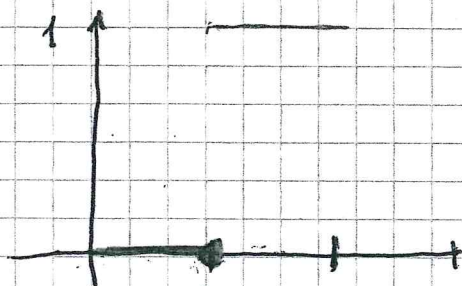
Allora il teorema di Weierstrass vale ancora per il minimo ^(nel senso che) f ammette un minimo in K

Nota una f che verifica (5.1) si dice
semicontinua inferiormente in x_0

Un esempio di funzione S.C.I. in x_0
ma non continua è dato (corsa) da $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$



La dim. della seconda $\frac{1}{2}$ parte è uguale per
alla (4.1), dove per un seq $f(\bar{x}) \leq \lim f(x_{n_k}) = 1$
che basta per dim. $f(\bar{x}) = 1$.

ES (cont)

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ definiamo $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Dimostrare che (S_n) Non è di Cauchy

Dimostrare che

$$\forall p \in \mathbb{N} \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_{n+p} - S_n| = 0$$

5) Dare un esempio di due successioni reali

(a_n) e (b_n) tali che

$$a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum a_n$ converge, $\sum b_n$ diverge

Questo apparentemente contraddice il
teo a pag 2 della lezione 6, ma
solo apparentemente, perché in quel
teo si supponeva anche $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

Qui questo non si suppone

$$b_n = -\frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = -\infty$$

Ciò $a_n \geq -\frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum a_n \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(-1)^n}{n} \geq -\frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ s'}$$

Se al contrario $a_n = -\frac{1}{n}$, avrei anche
che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$, che non sarebbe andato bene.

Anzi posso prendere $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

4) Se (S_n) fosse p.a. di Cauchy,
grazie allo schema della lemma 16,

$$S_n \longrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ . } \text{Ma sappiamo (bene)}$$

$$\text{che } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty \text{ . Assurdo (} x = +\infty \notin \mathbb{R} \text{)}$$

$$\frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4n^n - 3(n!)} = \frac{n^n \left(\frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \right)}{n^n \left(4 - 3 \frac{n!}{n^n} \right)}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{\frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{4 - 3 \frac{n!}{n^n}} \longrightarrow \frac{e^{-2}}{4}$$

0