

Lezione 21

5/11/2020

8.15-12.00

Def (Continuità) Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

si dice che f è continua in E

se f è continua in ogni punto $x \in E$.

ES 1 (una funzione non continua in ogni punto)

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dimostrare che f non è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

ES 2 Trovare una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

non continua in quel punto, una tale che

lff è continua in quel punto.

ES* 3 Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in (0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Dimostrare che f è continuo in ogni $x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$
 ed è discontinuo in ogni $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Qualche oss. sulla def di continuità: supponiamo

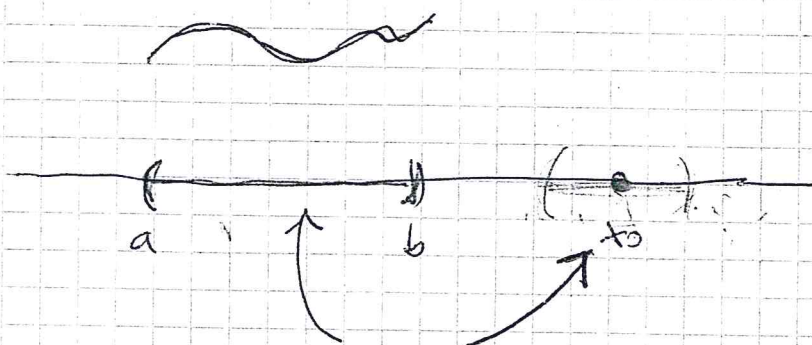
$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Allora

riscono due casi:

(1) x_0 è isolato, cioè $x_0 \notin \overline{E \setminus \{x_0\}}$

(2) x_0 non è isolato, cioè $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$

Cas (1):



f è continua in x_0 (senza ulteriori ipotesi su f)

Dim Dato dim. (vedi pg 17 lezione 20)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in E \quad (2.1)$$

Uitama Lemma 2 lezione 20 pg 11:

da questo lemma sappiamo che sono equivalenti
tra $p > 0$

1) (2.1)

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ in $E \cap (x_0 - p, x_0 + p)$

Quindi mi basta dim. 2) : scelgo $p > 0$

in modo che $(x_0 - p, x_0 + p) \cap E = \{x_0\}$
(cosa che posso fare dato che x_0 è isolato)

La 2) diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } \{x_0\}$$

e questo è sempre vero.

Caso (2), $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$. Allora

sono equivalenti

(3.1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } E$$

(3.2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } E \setminus \{x_0\}$$

← →

(4)
 osservando che $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$
 dal Lemma 1 di Lemma 20 ✓

$$(3.1) \Rightarrow (3.2)$$

con $L = E \setminus \{x_0\}$.

(3.2) $\Rightarrow$ (3.1): usiamo il Lemma 3
 della Lemma 20 con la scelta

$E \setminus \{x_0\}$ al posto di E

$\{x_0\}$ al posto di L

Tutte le ipotesi del Lemma 3 sono verificate,
 dunque per deriv. la (3.1) noi abbiamo
 deriv. da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } E \setminus \{x_0\} \quad (4.1)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } \{x_0\} \quad (4.2)$$

La (4.1) è equivalente alla ipotesi (3.2)

e la (4.2) è sempre vera.

Pensare a Gue mai questo non Galadriel l'esempio a ✓
 pag 5 Lemma 20

Esempio

$f(x) = \text{costante}$ è continua in $\mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$ " " "

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$, $\cos x$, e^x , sono continue in $\mathbb{R}$

In questo le somme di un numero finito di funzioni continue definite su un dominio comune è continua (in quel dominio); la stessa cosa vale per il prodotto. Ma dimostrarlo di quello ma questa serve a pag 7 della lezione 20, che a sua volta si basa sulle caratterizzazioni equivalenti del limite (cioè la lezione 19), la quale a sua volta si basa sull' enunciato analogo fatto a suo tempo in le successioni

ES $f(x) = \sinh x$, $g(x) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

sono continue. Ricordiamo

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dimostrare $h(x) = \tanh x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Ricordiamo $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Risultano poi continue nel loro dominio

def = $(0, +\infty)$ $f(x) = \log x$, $g(x) = \tan x$, dom $g = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Un utile risultato delle funzioni continue

che permette di studiare moltissime e' data da

Prop (composizione di funzioni continue)

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in E$

Sia $g: H \supseteq f(E) \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo $y_0 := f(x_0)$,

e supponiamo g continua in y_0 . Allora

$g \circ f$ è continua in x_0 (6.1)

In particolare, se f è continua in $\text{dom}(f)$
e g è continua in $\text{dom } g$ ($\text{dom } g \supseteq f(\text{dom } f)$)
allora $g \circ f$ è continua in $\text{dom } f$.

Ad esempio, $e^{\sec x}$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $e^{\tanh(\log(1+x^2)) - 1}$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dim La (6.1) equivale a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) \quad \text{in } E$$

Poiché $f(x_0) = y_0$, la (6.1) equivale a

$$(7.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) \quad \text{in } E$$

Approchiamo Lemma 4 lec. 20 pg 15. con

le scelte:	$\overline{X}$	x_0 ($x_0 \in E \subseteq \overline{E}$)
	p	$f(x_0)$
	q	$g(y_0)$

Allora la (15.3) della lemma 20
diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) \quad \text{in } E$$

Così la (7.1).

□

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e, (Teo WEIERSTRASS)

Teo V Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$

Allora f ammette ^{punti di} massimo e ^{punti di} minimo
in $[a, b]$.

Oss le ipotesi su f sono 2:

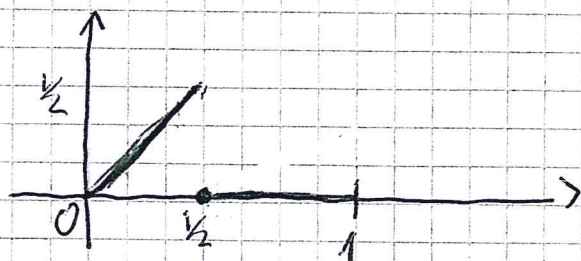
(*) dove $f = [a, b]$ intervall. chiuso
e limitato

che è compatto in $\mathbb{R}$ (da B.W.)

(**) f è continua su $[a, b]$

Oss se eliminiamo l'ipotesi (**) posso sperare

che il teo sia ancora vero?



$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1/2] \\ 0 & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

f non è continua in $x = \frac{1}{2}$

f è continua in x , $\forall x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

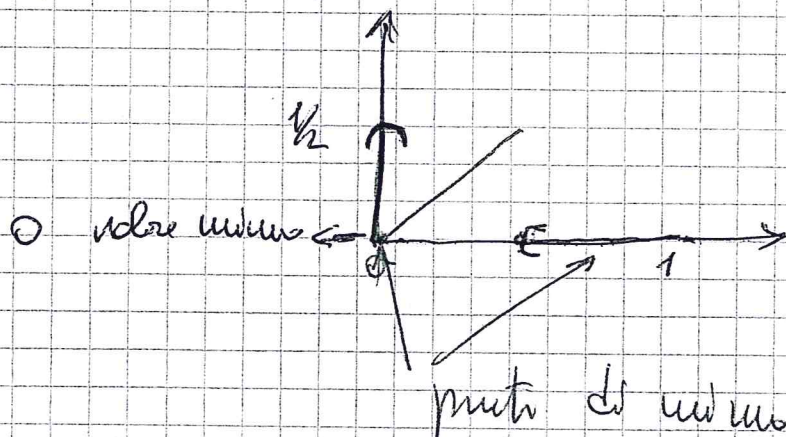
f ha punti di minimo, che sono
 $\{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$

Prende da $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$x_0 \in E$ il più piccolo punto di minimo di f

$$\begin{aligned} \text{e} \quad f(x_0) &= \min \{ f(x) : x \in E \} \\ &= \min f(E) \end{aligned}$$

(e $f(x_0)$ si chiama valore minimo di
 f in E)



$$f([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$$

$$\sup f = \frac{1}{2}$$

$$\nexists \max f$$