

Lezione 20

4/11/2020

10.00 - 13.30

ES $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dobbiamo dir. to pg 10 lezione 19, cioè

$\varepsilon - \delta$ condizione $\Leftrightarrow$ condizione sequenziale.

1) $\Rightarrow$ 2) Sia $\varepsilon > 0$, δ_ε come nella 1); prendiamo poi $(x_n) \subset E$,

$x_n \rightarrow \bar{x}$. Dobbiamo dir. che

$f(x_n) \rightarrow l$. Dalla def. di limite

di successione, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$,

$$\bar{n} = \bar{n}(\delta(\varepsilon)) = \bar{n}(\varepsilon) :$$

$$|x_n - \bar{x}| < \delta \quad \forall n > \bar{n}$$

$\bar{n}$ dipende da δ , ma δ dipende da ε , dunque $\bar{n}$ dipende solo da ε

Sono autorizzato a mettere nelle 1)
 x_n al posto di x (con $n > \bar{n}$). Ottago

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Di conseguenza ho dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}(\varepsilon) : \forall n > \bar{n}(\varepsilon)$$

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon$$

E questo, in definizione, equivale a dire
 che $f(x_n) \rightarrow l$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo per assurdo che

1) sia falsa:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x \in E \quad |x - \bar{x}| < \delta, \quad |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

prendendo δ della forma $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in E \quad |x_k - \bar{x}| < \frac{1}{k}, \quad |f(x_k) - l| \geq \varepsilon$$

Ho costruito $(x_k) \subset E$, $x_k \rightarrow \bar{x}$, $|f(x_k) - l| \geq \varepsilon$

da cui $(f(x_k))$ non tende a l $\forall k \in \mathbb{N}$

Ho dunque falsificato 2). Abbiamo

dim. $\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$ e $2) \Rightarrow 1)$.

□

Due parole sulla nostra def. di limite,
indicando una piccola differenza tra
la def. a pag 2 Becker 19, e la def.
di [AB, pag 268]

Tipicamente si richiede $\bar{x}$ sia di accumulazione
in E , invece di $\boxed{\bar{x} \in E}$;

si richiede ad esempio che x non sia
isolato (qualora $x \in E$). E poi si
richiede, in più all'ultima riga della
19 pag 2, anche $x \neq \bar{x}$.

[AB pag 268]: Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\boxed{x^*}$ di accumulazione

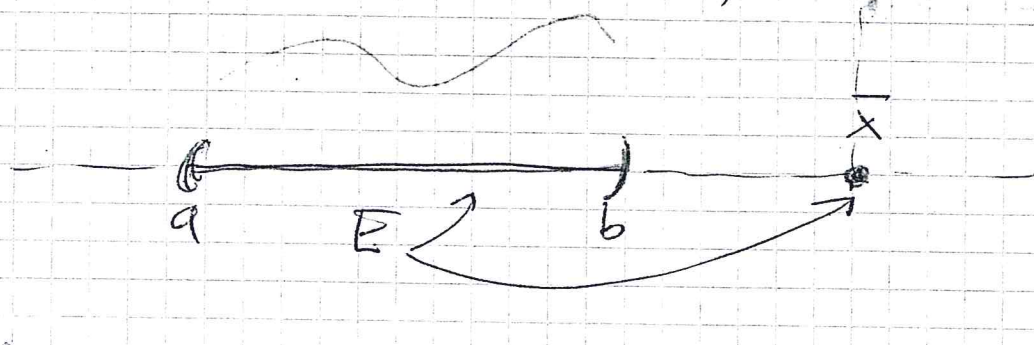
$\boxed{x^* \in E}$. Sia $l \in \mathbb{R}$. Diciamo $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x^*$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, |x - x^*| < \delta, \boxed{x \neq x^*}$

ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

2 sono dunque le differenze della nota
 def. di $[AB]$; in quanto riguarda
 la 1^a differenza, noi possiamo
 fare $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ quando $\bar{x} \in E$ e $\bar{x}$ è isolato,

mentre $[AB]$ richiedendo $\bar{x}$ di accumulazione,
 escludendo questo possibilità. Questo comunque
 non è così interessante; per esempio



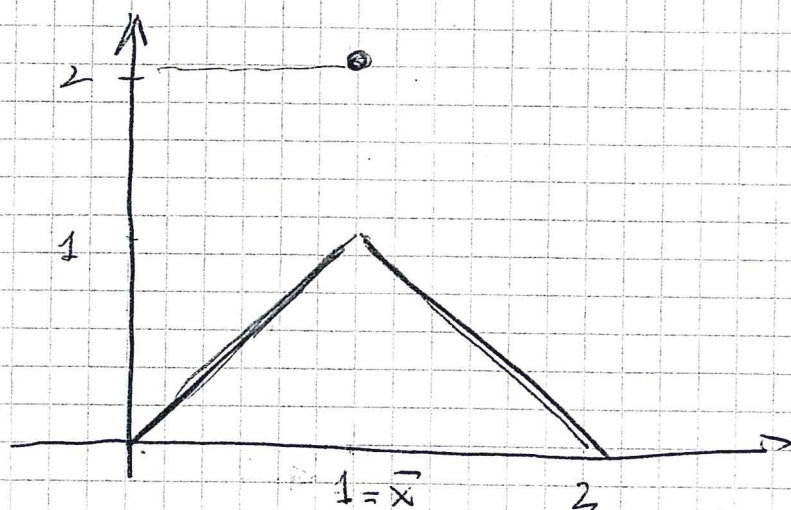
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ in E
 " ?

Se $(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow x_n = \bar{x}$ def. di "isolato di E "

$\Rightarrow f(x_n) = \beta$ def. di " "

Dunque $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \beta = f(\bar{x})$

La función diferente e + del Coto:



$$E = [0, 2]$$

$$\bar{x} = 1 \in E \subseteq \bar{E}$$

$$\bar{x} \text{ es un } \text{acc.} \mu E$$

$$f(x) = \begin{cases} x \\ 2 \\ 2-x \end{cases}$$

$$\& x \in [0, 1)$$

$$\& x = 1$$

$$\& x \in (1, 2]$$

$$\bar{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \cdot \cancel{\neq}$$

$$\text{en } E$$

$$\text{def. pp. 2 b. 11}$$

$$(5.1) \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = 1$$

$$[AB, \text{ pp. 208}]$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = 1$$

$$\text{en } E \setminus \{\bar{x}\}$$

Te

Il limite ∞ esiste, è unico.

« con degli argomenti verticali »

Def (limite infinito)

$$\text{Sia } f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \in \overline{E}$$

Diciamo che $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$ in E

$$\text{se } \forall (x_n) \subset E, \quad x_n \longrightarrow \bar{x}$$

$$\text{si ha } f(x_n) \longrightarrow +\infty$$

[Cercare in corso la def equivalente ma senza succumbi, cioè l'analogo di quella che prima era la condizione ε - δ .

Def Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che $E \supseteq (\lambda, +\infty)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ (il problema generalizzerei). Sia $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Diciamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ in E

$$\text{se } \forall (x_n) \subset E, \quad x_n \longrightarrow +\infty \quad \text{si ha } f(x_n) \longrightarrow l.$$

[Cercare in corso l'analogo senza succumbi]

Il teo 19.10 lemma 19 a' è molto
utile perché ci permette di dimostrare
un certo numero di affermazioni in $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
sapendo le analoghe affermazioni in h successori

Ad esempio, ha $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: G \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \in \bar{E} \cap \bar{G}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) + g(x))$$

|| ?

$$\begin{array}{c} \text{su } H \\ || \\ E \cap G \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) \quad (7.1)$$

L'equivalente è vero che

$$\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \quad \text{su } H$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \quad \text{su } H$$

e se nella (7.1) non accade mai $\pm \infty$

Existenz analoger Werte resultiert in

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) \cdot g(x)) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{existieren}$$

(siehe [AB]).

Te Seien $f, g: E \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$

(1) h f beschränkt

$$\exists K > 0 : |f(x)| \leq K \quad \forall x \in E$$

Sei $\bar{x} \in \bar{E}$ akkumulierend

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = 0 \quad \text{in } E$$

Alles

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) \cdot g(x)) = \quad \text{in } E$$

$$\text{Bsp} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^\alpha \cdot \cos \frac{1}{x} \right) = \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$\alpha \in (0, +\infty)$

Proprietà fondamentali dei limiti

Lemma 1 (di restrizione).

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{x} \in \bar{E},$$

$$l \in \mathbb{R} \text{ (per semplicità)}$$

ha per $L \subseteq E$, $\bar{x} \in \bar{L}$.

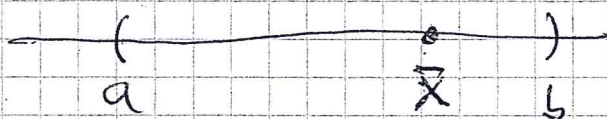
$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \text{ su } E \quad (9.0)$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \text{ su } L \quad (9.1)$$

Tipico esempio è quello dei limiti destri

$$\text{e Heine: } E = (a, b), \quad L = (a, \bar{x})$$

$$\bar{x} \in (a, b); \quad \bar{L} = [a, \bar{x}]$$



$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ su $L = (a, \bar{x})$ si chiama limite
sinistro di f in $\bar{x}$

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ su $(\bar{x}, b)$ si chiama limite destro
di f in $\bar{x}$

« Se esiste il limite "pieno", allora esiste
il limite sinistro, esiste il limite destro, e questi
tre limiti sono uguali tra loro ».

Dim Per dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad \text{in } L$$

basta dimostrare (usando la caratterizzazione

2) del teorema 19) che

$$\forall (x_n) \subset L, \quad x_n \rightarrow \bar{x} \quad \text{si ha } f(x_n) \rightarrow l.$$

Prendiamo $(x_n) \subset L, \quad x_n \rightarrow \bar{x}$;

Poiché $L \subseteq E$ si ha $(x_n) \subset E$.

Ma so che (dalla (9.0)) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ in E ,

e dunque dalla 2) del teo 19,

$$f(x_n) \rightarrow l.$$

□

Nota Il lemma vale in generale
nel caso $\bar{x} = \pm \infty, \quad l = \pm \infty$.

Il secondo lemma dice che il limite
è un'operazione locale, cioè per calcolarlo
mi serve sapere "come è fatta f solo nelle
vicinanze di x ".

Lemma 2 (di localizzazione) Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \bar{E}$, $l \in \mathbb{R}$ (uguale anche negli
altri casi)

Sia $\rho > 0$. Allora sono equivalenti:

1) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su E

2) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su $E \cap (\bar{x} - \rho, \bar{x} + \rho)$

Dnw 1) $\Rightarrow$ 2) Applicando Lemma 1, con

la scelta $L = E \cap (\bar{x} - \rho, \bar{x} + \rho)$ ($L \subseteq E$,

$\bar{x} \in \bar{L}$ (per caso)), segue la 2).

Dimostrano ora 2) $\Rightarrow$ 1). Utilizzando
il lemma 19, devo dimostrare che

• Se $(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora $f(x_n) \rightarrow l$.

Prendiamo dunque $(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$.

Dato che $\rho > 0$ è fissato, $\exists n = n_\rho$

tale $x_n \in (\bar{x} - \rho, \bar{x} + \rho) \quad \forall n > n_\rho$

In particolare $x_n \in E \cap (\bar{x} - \rho, \bar{x} + \rho) \quad \forall n > n_\rho$

Dunque posso usare la 2) del te. 1.19
e la mia ipotesi 2) per concludere

che $f(x_n) \rightarrow l$.

□

« L'operazione di limite di f in $x \rightarrow \bar{x}$
non vede le modifiche fatte su f
lontano da $\bar{x}$ »

Lemma 3 (dell'unicità) Sia $f: E \cup L \rightarrow \mathbb{R}$
 $\bar{x} \in \bar{E} \cap \bar{L}$, $l \in \mathbb{R}$ (ma vale anche negli altri casi)

e supponiamo $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su E

e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su L .

Allora $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su $E \cup L$.

13

Esempio tipico in cui si applica questo lemma 3
 è il viceversa di quanto sotto alla fine di pag
 9, cioè "e" : essendo il limite destro e
 sinistro di f per $x \rightarrow \bar{x}$ e sono uguali,
 allora esiste il limite $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f (=$
 limite destro = limite sinistro) : si considera

$$E = (a, \bar{x}), \quad L = (\bar{x}, b)$$

$$a < \bar{x} < b, \quad \bar{x} \in E \cap L.$$

Dim Usiamo la def. ϵ - δ :

l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \underline{l}$ in E significa

$$\text{3.1) } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad \underline{\forall x \in E}, \quad |x - \bar{x}| < \delta_\epsilon \\ \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

al'ipotesi $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \underline{l}$ in L significa

$$\text{2) } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \sigma_\epsilon > 0 : \quad \forall x \in L, \quad |x - \bar{x}| < \sigma_\epsilon \\ \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Devo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in EUL, \quad |x - \bar{x}| < \alpha_\varepsilon \quad (14.1) \\ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Dato $\varepsilon > 0$, definisco $\alpha_\varepsilon := \min(\delta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) > 0$

Voglio dimostrare che con questa scelta di α_ε è verificata la (14.1).

Sia dunque $x \in EUL$, ... e per

$x \in E$ oppure $x \in L$. Supponiamo $x \in E$.

$$\text{e } |x - \bar{x}| < \alpha_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon \quad \text{si ha dalla (13.1)}$$

$$\text{che } |f(x) - l| < \varepsilon. \quad \text{Dunque la (14.1)}$$

è verificata in gli x che stanno in E .

$$\text{Supponiamo ora } x \in L: \quad \text{e } |x - \bar{x}| < \alpha_\varepsilon \leq \sigma_\varepsilon$$

$$\text{si ha dalla (13.2) che } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

□

È interessante osservare che in questa dimostrazione

non abbiamo usato le caratterizzazioni ε - δ ,

e non quella sequenziale. Quindi il teorema (19.1)

lezione 19 si usa in pieno.

L'ultimo lemma, molto utile agli
 inizi, è il seguente:

Lemma 4 (di compattezza). Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\bar{x} \in \bar{E}$, $\forall \overbrace{p \in \mathbb{R}}^p$ ha $g: H \ni f(E) \rightarrow \mathbb{R}$
 $q \in \mathbb{R}$ (vale anche in altri casi).

Supponiamo

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \quad \text{su } E \quad (15.1)$$

$$\lim_{y \rightarrow p} g(y) = q \quad \text{su } H \quad (15.2)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(f(x)) = q \quad \text{su } E \quad (15.3)$$

oss si può seguire la (15.2) solo accertarsi
 che $p \in H$. Ovvio che $H \ni f(E)$
 $\Rightarrow \bar{H} \ni \overline{f(E)}$. Basta allora vedere che
 $p \in \overline{f(E)}$.

• Dire $p \in \overline{f(E)}$ significa che p è limite di una successione di punti di $f(E)$:

prendiamo $x_n \in E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$; dalla (15.1) segue che $f(x_n) \rightarrow p$, dunque p è limite di $(f(x_n)) \subset f(E)$.

• Dm Per dimostrare la (15.3), grazie al solito lemma, devo vedere che se $(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora $g(f(x_n)) \rightarrow q$.

Per l'ipotesi (15.1), abbiamo $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ su E ,

dunque $f(x_n) \rightarrow p$. Per l'ipotesi (15.2)

abbiamo $\lim_{y \rightarrow p} g(y) = q$ su H ;

per il solito lemma $g(y_n) \rightarrow q$.

Ma $g(y_n) = g(f(x_n)) \rightarrow q$, e questo conclude la dimostrazione. $\square$

LA CONTINUITÀ $\Leftarrow$ Teoria Limiti

Def (Continuità in un punto)

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in E$

Si dice che f è continua in x_0

k

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{su } E$$

Nota importante: dal teo fatto lezione 19

si deduce che f è continuo in x_0

$\Leftrightarrow$ val. una delle seguenti

due condizioni equivalenti (nell'anno $f(x)$ al punto x , e x_0 al punto x_0)

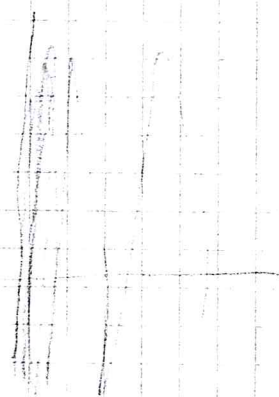
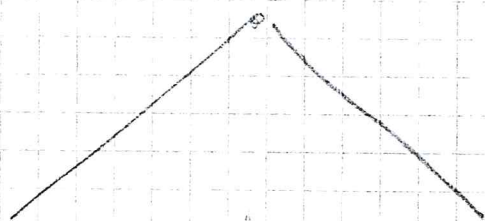
1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 : \forall x \in E,$

$$|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0} \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2) $\forall (x_n) \subset E, \quad x_n \longrightarrow x_0 \quad \text{si ha } f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$

Se consideriamo l'esempio della funzione
a pag 5, dalla (5.1) ad esempio,
segue che (usando la def di $[AB]$ di limite)
 f non è continua nel punto $x_0 = 1$

(vedo $f(1) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ secondo (AB))



Es (con) tra

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f non è continua in $x_0 = 0$ (qualunque sia
la scelta di ω).