

Lezione 1

22/9/2020

12-13.55

1

ACERBI - BUTTAZZO "Primo corso di An. Nat."

CECONI - STARRACCHIA "Analisi 1: Funzioni di 1 var."

→ "Esercizi (risoltr)"

Altri buoni libri:

Prodi "Analisi Matematica 1"

Grilardi "Analisi 1"

⋮

$\mathbb{N}$ numeri naturali = $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

insieme infinito.

Su $\mathbb{N}$ abbiamo $<$, relazione binaria:

$<$ gode della proprietà transitiva

$$(1.1) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N} \quad x < y, y < z \Rightarrow x < z$$

Def. Un sempreordinamento su $\mathbb{N}$

è una relazione binaria che gode di (1.1)

2
Su $\mathbb{N}$ abbiamo anche $\leq$, un'altra relazione
binaria: una gode di

1) proprietà transitiva

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

2) riflessiva: $\forall x \in \mathbb{N} \quad x \leq x$

(invece non è vero $x < x$)

3) antisimmetrica:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$$

Nota $x \leq y$ se $x < y$ e non è vero $y < x$

Proprietà di $\mathbb{N}$: $\leq$ si dice relazione
d'ordine, o ordinamento, su $\mathbb{N}$.

(Non confondere questa relazione d'ordine
con il concetto di relazione di equivalenza,
dove valgono 1), 2) e 3) per vice sostituita
da $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ che ha due proprietà
simmetrica)

Il $\leq$ su $\mathbb{N}$ gode delle proprietà di essere
un BUON ORDINAMENTO, cioè ogni
sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette
minimo elemento.

Def Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$

Si dice che $m \in \mathbb{N}$ è minimo di E se:

- 1) $m \in E$
- 2) $\forall e \in E \quad m \leq e$

Nota Bene: discuteremo a lungo nel
corso un "surrogato" della Def. precedente

Quando al posto di $\mathbb{N}$ ci saranno i
numeri reali. In $\mathbb{R}$ non tutti i sottoinsiemi
non vuoti ammettono minimo elemento
dunque $(\mathbb{R}, \leq)$ non è bene ordinato; e allora
invece del minimo si considera il cosiddetto
estremo inferiore.

Esercizio Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$; allora
il minimo di E è unico. (per caso)

chiesto perche la kguente

4

Def Sia $n \in \mathbb{N}$; Porpo

$$E := \{ m \in \mathbb{N}; m > n \}$$

Allora $E \neq \emptyset$ e dunque ammette un
minimo che si chiama il successore
di n , e si indica con $n+1$

Quindi ogni numero naturale ammette
un unico successore.

Inoltre, ogni numero naturale > 1 e'
successore di un numero naturale.

Nota Bene: queste proprietà sono false per
i numeri razionali e i numeri reali;

Vogliamo ora arrivare al principio di
induzione, un'altra fondamentale
proprietà dei numeri naturali.

Esercizio 1 Dato $n \in \mathbb{N}$, calcola

$$\sum_{j=1}^n j = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

"Sono infiniti esercizi, al venire di n "

Ci sono 2 strade per affrontare l'esercizio:

- Strada + furba, mi invento un modo per fare il calcolo
- (strada da potremmo essere usata per controllare la Correttezza di .) uso l'induzione, dove però qualcuno mi dà un suggerimento su cosa devo dimostrare.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ (1+n) & + & (2+n-1) & + & (3+n-2) & + & \dots \\ & = & \frac{n(n+1)}{2} & \text{(Controllare la Cora, dividendo)} \\ & \text{il caso } n=1 \text{ e } n=\text{disponi} \end{array}$$

Controllo rigoroso della validità di

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5.1)_n$$

sì può fare usando il principio di induzione.

- a) Controllare a mano che $(S.I)_1$ è vera,
- b) Controllare che se è vera $(S.I)_n$ allora è vera $(S.I)_{n+1}$.

Fatte queste 2 verifiche, l'induzione permette di affermare che $(S.I)_n$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

a): $\sum_{j=1}^1 j = \frac{1(1+1)}{2}$ cioè $1=1$ si

b) ipotesi $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

tesi $\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Per dim. la tesi (usando l'ipotesi) siamo

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^n j + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

cioè la tesi.

$$1 + \dots + 999 = 999 \cdot 500 = 499.500$$

Es. 2 Calcolare la somma dei primi n

numeri dispari

es: $n=6$ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

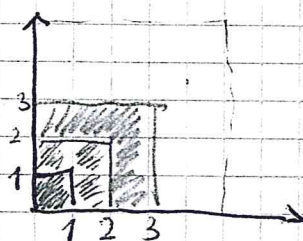
4

9

16

Conq: $n^2 = \sum_{j=1}^n (2j-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Prima osservazione che
rappresenta il quadrato
di lato n con tanti
quadrati di lato 1
(senza sovrapposizioni):



$\text{Area}(\square_n) = n^2$

Calcoliamo $\sum_{j=1}^n (2j-1) = \sum_{j=1}^n 2j - \sum_{j=1}^n 1$

$= 2 \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1$

es. rec. $\cancel{2} \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n(n+1)-n}{1} = n^2 + n - n = n^2$

Es Calcolare $\sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Come immaginare una possibile formula:

trucco: Conto backwards dato $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 x^3 - (x-1)^3 &= x^3 - (x-1)^2(x-1) \\
 &= x^3 - (x^2 - 2x + 1)(x-1) \\
 &= x^3 - (x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1) \\
 &= x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\
 &= 3x^2 - 3x + 1
 \end{aligned}$$

In particolare, per $x=n, x=n-1, x=n-2, \dots, x=1,$

$$\begin{cases}
 n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 \\
 (n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \\
 \vdots \\
 1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1
 \end{cases}$$

Sommo tutte le eq:

$$n^3 = 3 \sum_{j=1}^n j^2 - 3 \sum_{j=1}^n j + n$$

↑
INCOGNITA

$$3 \sum_{j=1}^n j^2 = n^3 + 3 \sum_{j=1}^n j - n$$

$$= n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n}{3}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Per ora

$\sum_{j=1}^n j^3$; si fa "come prima"

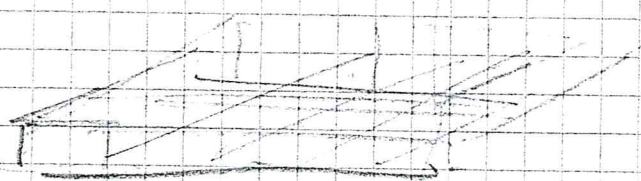
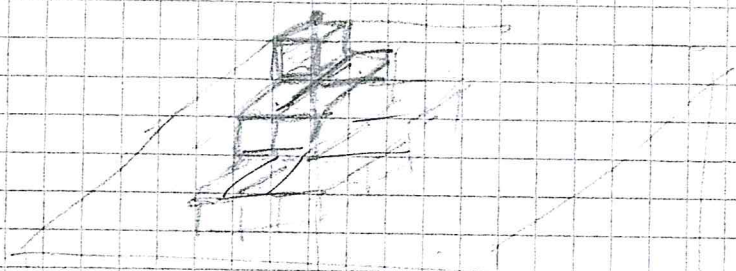
$$x^4 - (x-1)^4 = x^4 - (x-1)^2 (x-1)^2$$

$$= x^4 - (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \dots$$

usando il fatto che la già $\sum_{j=1}^n j^2$, $\sum_{j=1}^n j$, $\sum_{j=1}^n 1$

Tommaso a $\sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$



Volume dell'insieme di tutte queste "mattonelle" non coperte $= n^3$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = n^3 - \text{Volume (Zona non riempita)}$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j^2 &= n^3 - \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) \\ &= n^3 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = n^3 - \sum_{j=1}^{n-1} j$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - 2n^2 = n^3 - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$3 \sum_{j=1}^n j^2 = n^3 + 2n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n^3 + 2n^2 - \frac{n(n-1)}{2}}{3}$$

$$= \frac{2n^3 + 4n^2 - n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$