

Lesson 19

3/11/2020

12 - 13.45

Ricoverimento telematico 17.30 - 19.30

Cominciamo lo studio delle funzioni

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Fino a adesso abbiamo studiato

funzioni $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (con numeri reali o complessi). La nozione di
opp. è contenere un dominio ($\text{dom}(f)$)
di f che ha un sottoinsieme generico
di $\mathbb{R}$; ad esempio

$$E = \mathbb{R}, \quad E = \text{intervallo},$$

$$E = (a, b) \setminus \{x_0\} \quad \text{con } x_0 \in (a, b),$$

eccetera.

Usare di più notazioni

12

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

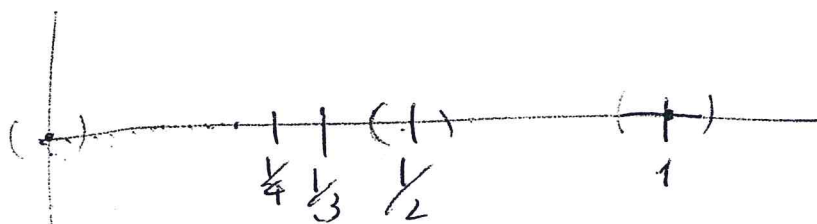
$$E = \text{dom}(f), \quad E \neq \emptyset$$

Def Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Si dice che x_0 è un punto isolato di E "se vicino a lui non ci sono altri punti di E ", e

$$\exists \rho > 0 : E \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho) = \{x_0\}$$

ES 1 $E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$; tutti i punti di E sono isolati



$$\overline{E} = E \cup \{0\}$$

0 non è isolato per $\overline{E}$

(risultato vero $\overline{E} \supseteq E$)

Sia $x_0 \in E$, cosa vuol dire

$$x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}} \quad ? \quad (3.1)$$

$\overline{E \setminus \{x_0\}}$ è costituito dai limiti di successioni di punti di $E \setminus \{x_0\}$, convergenti.

Da qui (3.1) significa che

x_0 è limite di una successione di punti di E diversi da x_0

Def un punto $y \in \mathbb{R}^n$ dice di accumulazione

per E se

$\forall \rho > 0 \quad \exists$ punti di E in $(y-\rho, y+\rho)$
diversi da y , cioè $(E \setminus \{y\}) \cap (y-\rho, y+\rho) \neq \emptyset$

ES Sia $x_0 \in E$, $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$. Allora

x_0 è di accumulazione per E .

Vediamo che la nozione di limite
(finito o infinito) su subsetti reali
definite su E .

Def (Limite Finito) Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
in $\bar{x}$
 $\bar{x} \in \bar{E}$ (not: $\frac{M \cup N}{\bar{x}} \in \bar{E}$)

Sia $l \in \mathbb{R}$ (il limite finito)

Dico che $f(x)$ tende a l su
 x che tende a $\bar{x}$ su E , e scriverò

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad \text{su } \underline{\underline{E}}$$

se "vale la condizione ε - δ ", cioè (4.1)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \quad \delta_\varepsilon$$

$$|x - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

Def • ε è "un piccol" raggio da mettere
nell'asse verticale, δ è "un piccol" raggio
da mettere nell'asse orizzontale

• $\delta = \delta_\varepsilon$ (tipicamente decrescente)

• l deve essere finito (ossia $l \in \mathbb{R}$)
se non altro si scrive $|f(x) - l| < \varepsilon$

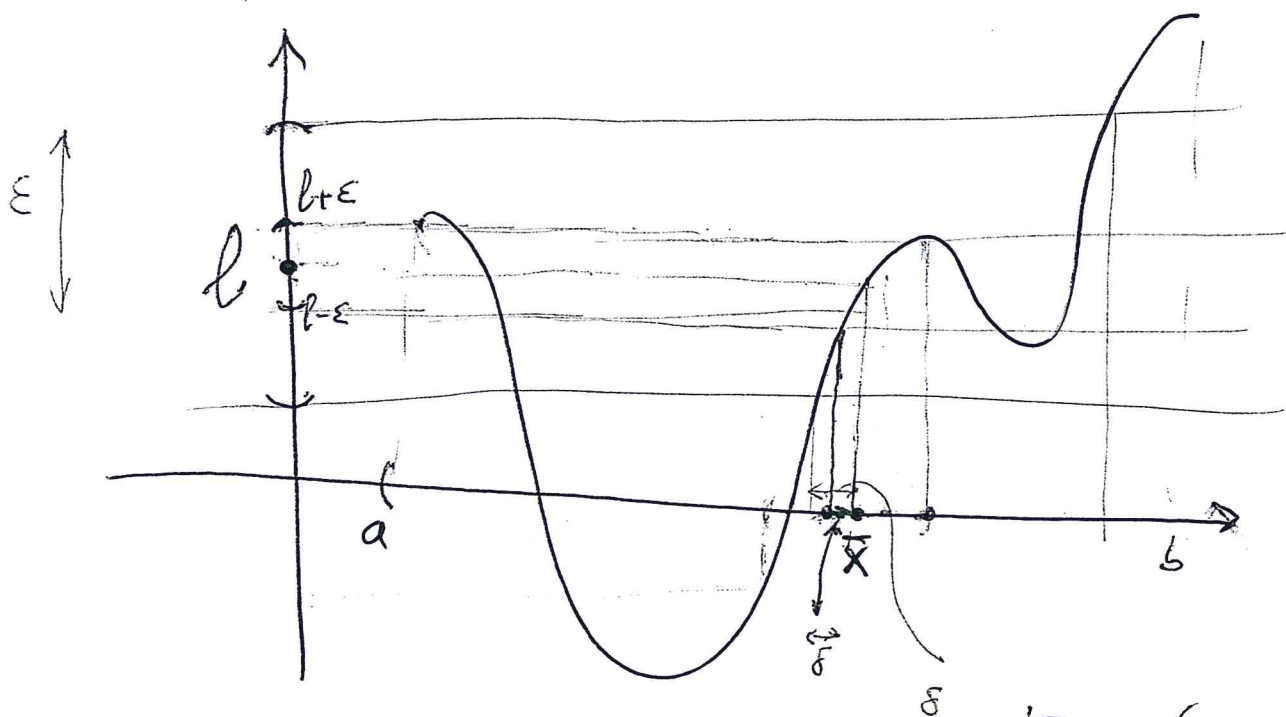
• $x \in E$ nella (4.1), e si vede
che $E = \text{dom}(f)$

• Nella (4.1) non posso usare

la scrittura $f(\bar{x})$, dato che

(anzi anche perché) $\bar{x}$ potrebbe

non appartenere a $E = \text{dom}(f)$

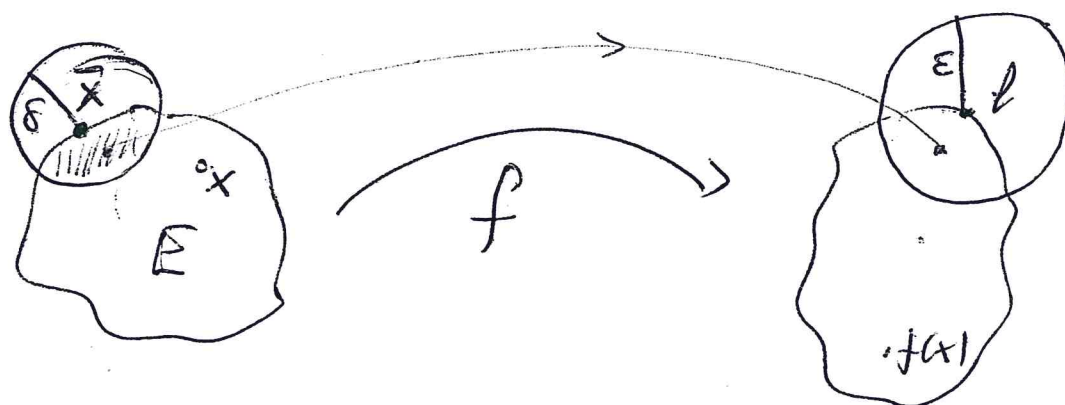


$$E = (a, b)$$

$$\bar{x} \in E$$

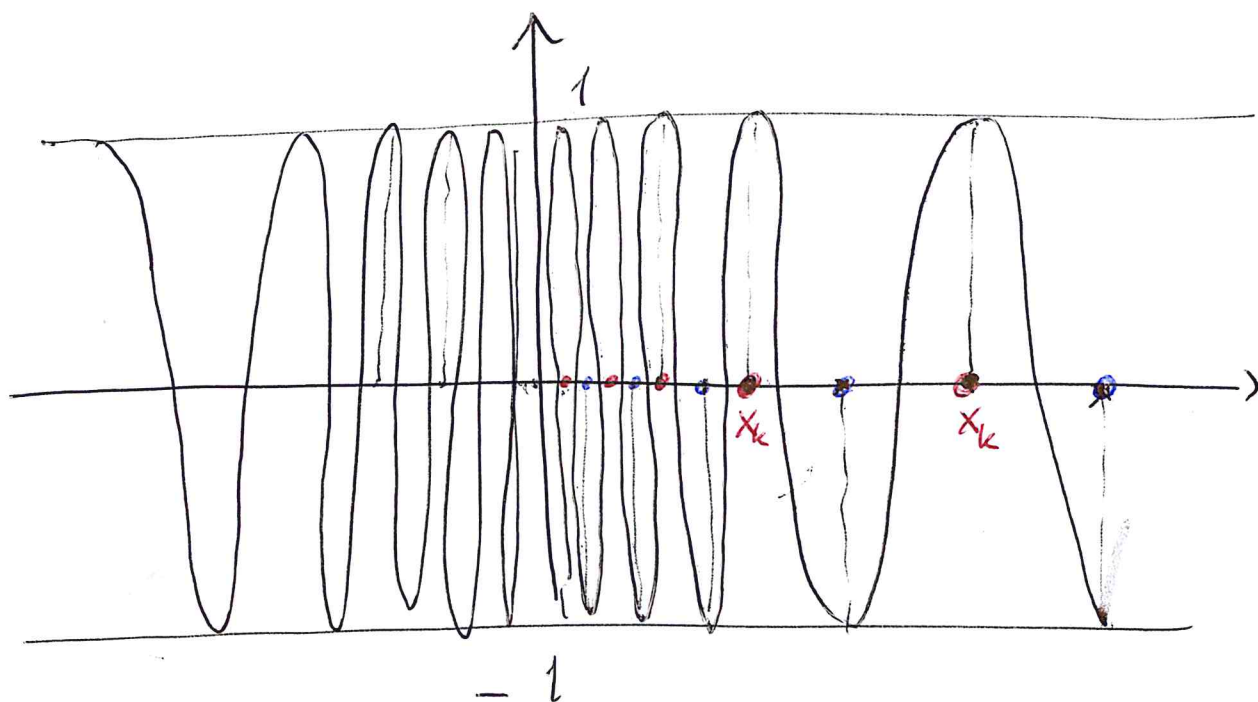
$\updownarrow \varepsilon$

« Per ogni ε in arbo esiste
un δ in pertenera tale che ... »



7

Dovremo però dimostrare che certe
 funzioni tendono a un limite l ; e
 potremmo mai ci riconduciamo a,
 dato ε , ~~trovare~~ trovare $\delta > 0$ per cui vale
 la (6.1): questo però è molto complicato.
 Dovremo una serie di risultati e regole
 che permetteranno di evitare di trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$
 esplicitamente.

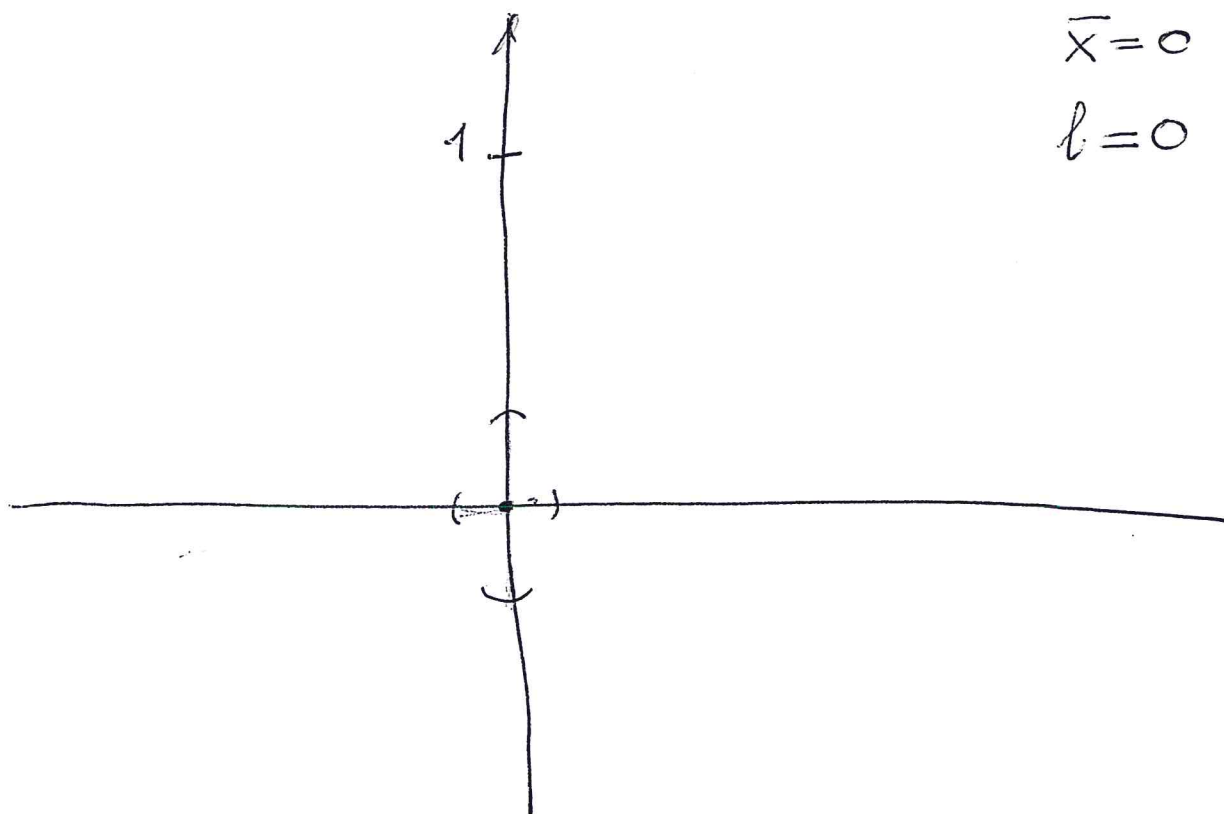


$$f: E = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 \in \overline{E} \quad f(-x) = -f(x)$$

Si può vedere che $\nexists l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = l \quad \text{on } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



? Per quali $x > 0$ $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$?

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi}$$

$$k \in \mathbb{N} \quad \sin(y_k) = -1$$

First $\frac{1}{2} \varepsilon > 0$, then $\delta > 0$,

for $k \in \mathbb{N}$ large enough so

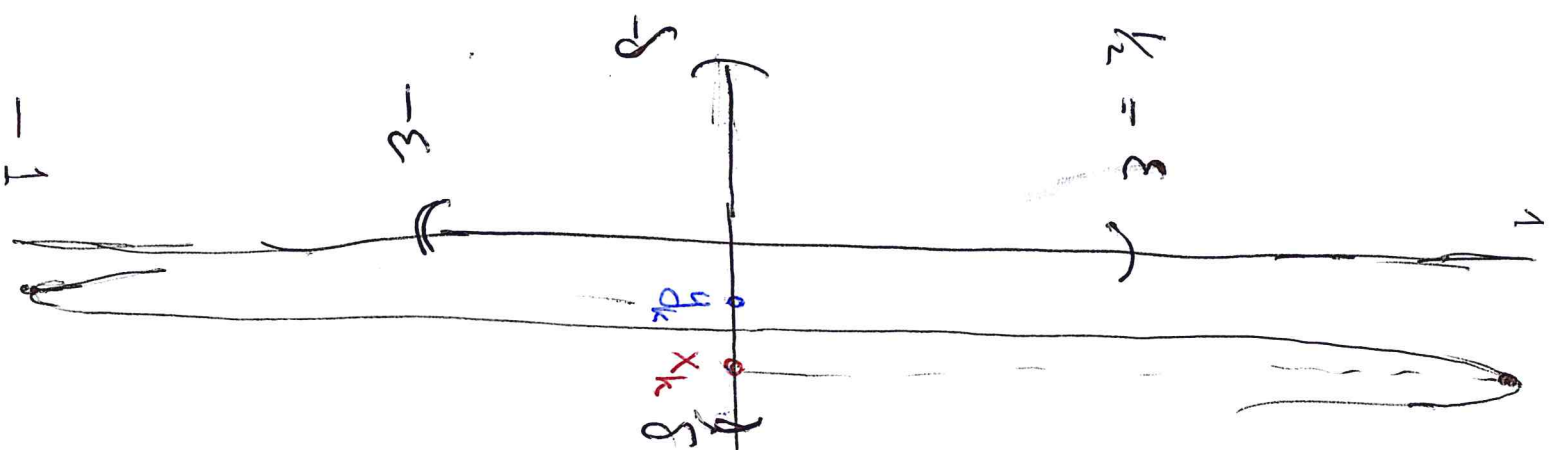
$$x_k, y_k \in (-\delta, \delta)$$

$$f(x_k) = 1 \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$f(y_k) = -1 \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$\Rightarrow$ 0 was not = $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

and this is the answer, for any $k \in \mathbb{N}$ we can find x such that $x \rightarrow 0$.



Un primo criterio di equivalenza ha
due possibili definizioni.

Teo (condiz. ε - $\delta \iff$ condizione sequenziale)

Sia $\bar{x} \in \bar{E}$, $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $l \in \mathbb{R}$.

Allora le seguenti due condizioni sono
equivalenti:

- 1) La (4.1), cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $\forall x \in E, |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$
- 2) $\forall$ successione $(x_n) \subset E$
convergente a $\bar{x}$ si ha
che la successione $(f(x_n))$
converge a l .

Notiamo che esiste almeno una
 successione di punti di E convergente
 a $\bar{x}$ (e dunque la condizione non
 è vuota): infatti per ipotesi $\bar{x} \in \overline{E}$
 e $\overline{E}$ è per def. l'insieme dei limiti
 di successioni convergenti di punti di E .

Es Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \in \text{dom}(f)$$

"
 $\mathbb{R}$

Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{su } E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Suggerimento:

$$\bar{x} = 0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

$$l = 1 \quad \text{Usare 2)}$$

di pag 10

Dimostrare che se

$$\forall (x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x_n \rightarrow 0$$



$$\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$$

Questo è conseguenza di un esercizio fatto
qualche lezione fa.