

Domani venerdì 23/10/2020 ore 18.00

I. CINQUEGRANA

Lezione 16 22/10/2020 8.30-10.15

Esercizio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} = ?$

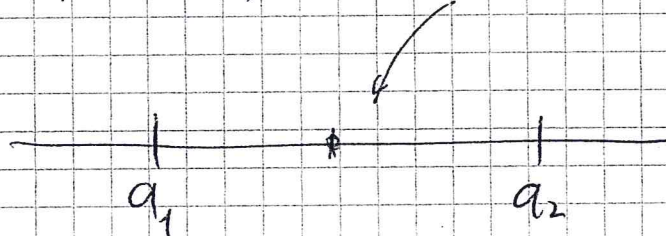
$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ Somma parziale

n-esima della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$ per

Confronto con $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \right)$

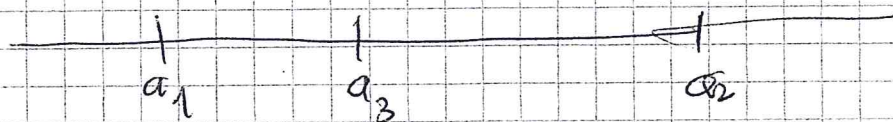
Oss

a_1, a_2 ; $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2$



a_1, a_2, a_3

$\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3$



Ho una media

$1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

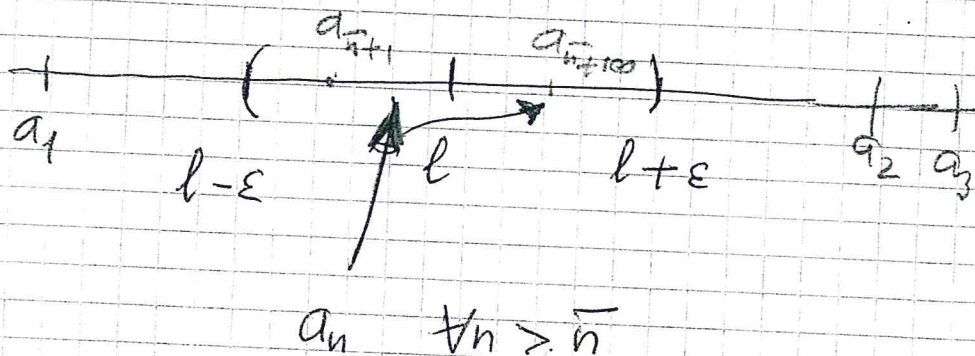
n

Esercizio

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ dimostrarlo

che $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \in \left[\min_{i=1, \dots, n} a_i, \max_{i=1, \dots, n} a_i \right]$

Supponiamo adesso che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$



$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n}$$

Te (delle medie di Cesaro). Sia

(a_n) una succ. reale, e supponiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = l$$

Dal tho di Cesaro, possiamo

dedurre (usando $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$) che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} = 0 = b.$$

Nota questo da una informazione
quantitativa di quanto rapidamente
divergano le somme parziali della

$$\text{serie } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Dim (teo Cesaro). Supponiamo

$$b \in \mathbb{R}$$

(gli altri con suo simile o
per $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Dalla def di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon = \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n > \bar{n}$, e consideriamo

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - l \right|$$

$\uparrow$
TRUCCO

$$\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \frac{n l}{n} \right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n a_i - n l \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (a_i - l) \right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (a_i - l) \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - l|$$

$$n - (\bar{n} + 1) + 1$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\bar{n}} |a_i - l| + \frac{1}{n} \sum_{i=\bar{n}+1}^n |a_i - l|$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{\bar{n}} |a_i - l|}{n} + \frac{(n - \bar{n}) \varepsilon}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon$$

Dal fatto che il 1° addendo
 tende a zero per $n \rightarrow +\infty$, e il 2°
 addendo tende a ε per $n \rightarrow +\infty$,
 deduco che $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - l| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\frac{1}{n} (n - n) \varepsilon < 2\varepsilon \quad \forall n > N$$

Allora finalmente giungo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - l \right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

$$\forall n > N_\varepsilon$$

Questo vuol dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = l$$

□

« Cesaro non H unite » :

$\exists$ succ. (a_n) :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Ma (a_n) non Converge.

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \equiv 1 (2) \text{ (dispari)} \\ 1 & n \equiv 0 (2) \text{ (pari)} \end{cases}$$

(a_n) non Converge. Ma

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

ALCUNE QUESTIONI DI TOPOLOGIA.

Def Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E si dice

(sequenzialmente) chiuso in $\mathbb{R}$

se data una succ. (a_n) di
punti di E , se $a_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$
allora $x \in E$.

Nota $\emptyset$ è chiuso.

« I limiti di successioni convergenti di
punti di E non possono uscire da E »

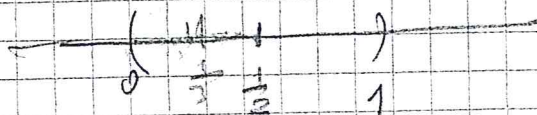
Esempi 1) $E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$

$$= \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad 0 \notin E$$



$$E \ni a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin E$$

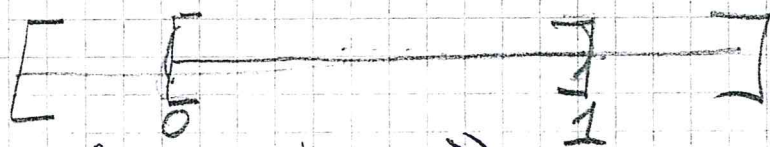
2) $E = (0, 1)$



$$E \ni a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin E$$

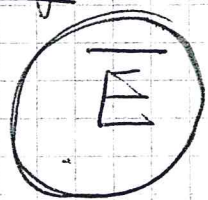
$E = [0, 1]$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

« Se un insieme non è chiuso in $\mathbb{R}$,
lo posso sempre chiudere, cioè posso
considerare il + piccolo insieme chiuso



che lo contiene »

Def Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si indica con

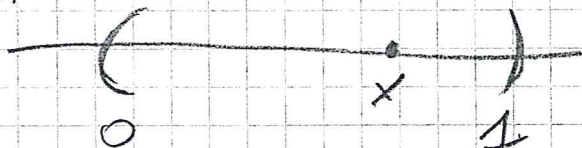


l'insieme costituito da

tutti i limiti di successioni

convergenti ^{fatte} di punti di E .

$\bar{E}$ si chiama la chiusura di E in $\mathbb{R}$.



Oss $\bar{E} \supseteq E$. Infatti sia $x \in E$;

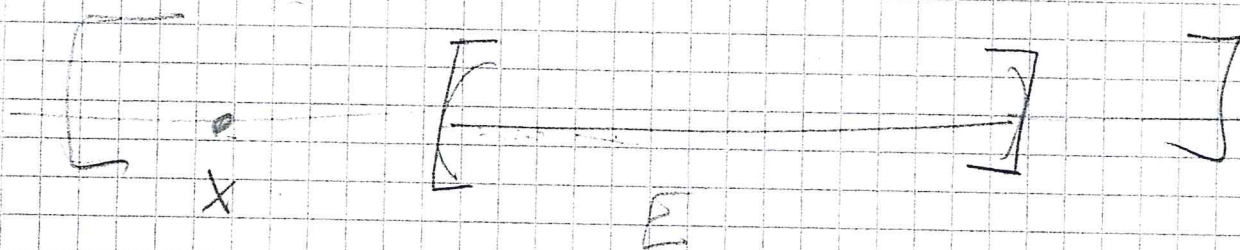
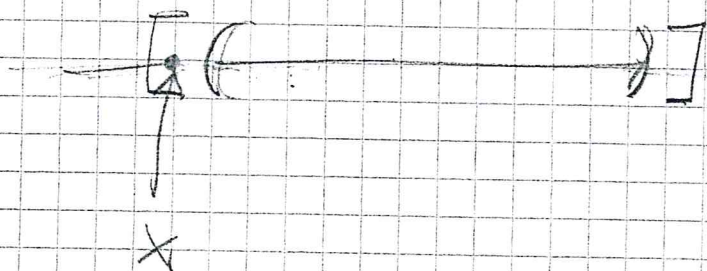
Voglio vedere che $x \in \bar{E}$; per fare questo

devo vedere che x è limite di una successione

di punti di E . Basta prendere $a_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

OS

$\bar{E}$ $\mathbb{R}$ -chiuso in $\mathbb{R}$ (per definizione)



ES $a < b$; $\mathbb{R}$ $E = (a, b)$ allora

$$\bar{E} = [a, b]$$

$\mathbb{R}$ $E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$$\bar{E} = E \cup \{0\}$$



ES (cosa)

$\mathbb{R}$

$$E = \mathbb{Q}$$

allora

$$\bar{E} = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$

$$E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

allora

$$\bar{E} = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$

$$E = \mathbb{R}$$

allora

$$\bar{E} = \mathbb{R}$$

ES E chiuso in $\mathbb{R} \iff \bar{E} = E$

Def Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E si dice
(sequenzialmente) compatto in $\mathbb{R}$

se data (a_n) una succ. di punti
di E , allora (a_n) ammette una
sottosuccessione convergente a un
punto di E .

Esempio Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che esiste
una succ. di punti di E
che non ha alcuna sottosucc. convergente
a un punto di E .

$$E = \mathbb{R}$$

$$a_n = n \longrightarrow +\infty \notin E$$

$$a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$