

Lezione 13

10.05-13.30

21/10/2020

Abbiamo visto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a > 0$

Esercizio (Dir. Bernoulli II)

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^2, \quad \forall x > 0, \quad \forall n \geq 1$$

Per cosa: (induzione su  $n$ ). Ripetendo gli argomenti della fine dello scr. 12, pag 8-9, ponendo

$$x_n := \sqrt[n]{n} - 1,$$

si ottiene (sostituendo al posto di  $n$ ,  $\frac{n(n-1)}{2}$ )

$$0 < x_n \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

Dal teo dei 2 carabinieri, segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Questo conclude la 4), e dunque la tabella a pag 6 dello scr. 12.

Esercizio

$$\sqrt[n]{n^3}$$

$$\sqrt[n]{n^{100}}$$

convergono? e di  
a cosa convergono?

II.

II

$$n^{\frac{3}{n}}$$

$$n^{100/n}$$

$$\sqrt[n]{n^3} = e^{\frac{3}{n} \log n}$$

$$= e^{\frac{3}{n} \log n}$$

$$= e^{\frac{3}{n} \log n}$$

per cosa:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{100}} = 1,$$

anzi

$\forall m > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^m} = 1$$

Del

resto

$$n^{\frac{3}{n}} =$$

$$n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}$$

$$= \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^3 = n^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}$$

...

vedi esercizio 5 les. 11 ...

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{(n!)^{n-1} - ((n-1)!)^n}{((n-1)! (n-10))^{n-1}}$$

$$= \frac{((n-1)!)^{n-1} [n^{n-1} - (n-1)!]}{((n-1)! (n-10))^{n-1}}$$

$$= \frac{n^{n-1} - (n-1)!}{(n-10)^{n-1}}$$

ricordando anche l'ut.

nt 2) tabella let. 12

$$= \frac{n^{n-1} \left[ 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right]}{(n-10)^{n-1}}$$

$$= \left[ 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right] \frac{n^{n-1}}{(n-10)^{n-1}}$$

$$= \left[ 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right] \left( \frac{n}{n-10} \right)^{n-1}$$

Devo capire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n-10} \right)^{n-1}$

$$\left( \frac{n}{n-10} \right)^{n-1} = \left( \frac{n-10+10}{n-10} \right)^{n-1}$$

$$= \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-1} \quad \text{questo uguale}$$

farlo assomigliare a  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-1} &= \cancel{\left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^n}{\left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^1} \end{aligned}$$

→ 1

Due più back twice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^n$$

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^n &= \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-10+10} \\ &= \underbrace{\left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-10}}_1 \cdot \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{10} \end{aligned}$$

→ 1

101  
Mi basta capire quanto fa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{n-10}\right)^{n-10} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{m}\right)^m$$

$$n-10 = m$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{10}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{10}{n}\right)^{\frac{n}{10} \cdot 10}$$

↓  
e

Il limite cercato è  $e^{10}$

Vale che  $\forall a_n > 0, a_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

□

Si ha che  $\forall x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x} x}$$

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{m} \quad ; \quad m = \frac{n}{x} \quad \underbrace{\text{può non appartenere a } \mathbb{N}}$$

e dunque (ad offi) non lo farei

lim  
 $m \rightarrow +\infty$

Si potrebbe insceglere

$$m = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor - 1 \quad \text{e} \quad \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + 1 \quad \dots$$

$$\text{In} \quad \underbrace{\text{per}}_{\text{vale anche}} e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Abbiamo visto, in le serie a termini  $> 0$ ,  
il criterio del rapporto e il criterio della  
radice (2 conseguenze del tes di  
confronto). Esistono simili test  
anche in le successioni.

Teo (criterio rapporto per successioni positive)

Sia  $(a_n)$  una successione di numeri  
positivi. Se  $\exists q \in [0, 1)$  tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{def. in } n \quad (7.1)$$

$$\text{allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (7.2)$$

Se  $\exists q > 1$  tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad \text{def. in } n \quad (7.3)$$

$$\text{allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad (7.4)$$

Nota: niente si dice quando  $q = 1$ .

Es  $\frac{2^n}{n^2} \rightarrow +\infty$  Sia  $p > 1, h > 0$

$$\text{allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^n}{n^h} = +\infty$$

Limite notevole da aggiungere alla  
 tabella di seni (quinto limite notevole)

Facciamo l'esercizio: poniamo

$$a_n = \frac{p^n}{n^h} > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)^h} \cdot \frac{n^h}{p^n}$$

$$= p \left( \frac{n}{n+1} \right)^h$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^h$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad = p > 1$$

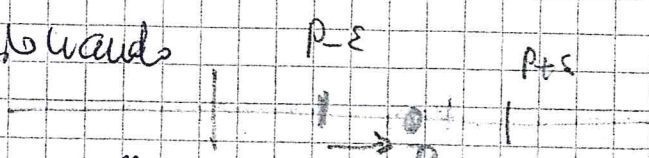
↑  
per ipotesi

Per poter applicare il criterio del rapporto e dunque dedurre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^n}{n^h} = +\infty$$

devo dire che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q' > 1$  def. 1.1.1

Questo segue ragionando



in modo simile alla 1.1.1 del teo. 1.1.1 del libro

(1)  $p$  dato, per  $\varepsilon > 0$  con  $p$  piccolo in  
 modo tale che  $p - \varepsilon > 1$ , dalla  
 def di limite segue

$$\underbrace{p - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < p + \varepsilon}_{\text{def in } n}$$

(2) Esercizio Sappiamo che  $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$  □

Vediamo se questo riusciamo a  
 richiamarlo usando il criterio del  
 rapporto: poniamo  $a_n := \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

allora dal criterio del rapporto (con argomento  $n/p$ )

« Nota il criterio del rapp. vale la pena  
 di provare ad applicarlo quando abbiamo  
 dei fattoriali »

permanenza del segno) segno

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Come mai  $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$  ?

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Considero  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$

Dim. (criterio del rapporto). Dimostriamo  
(7.2) che la lim. di (7.1) è

stabile). L'ipotesi (7.1) dice che

$$\exists N \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq N$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq q a_n \quad \forall n \geq N$$

$$0 < a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \dots \leq q^{n-N+1} a_N$$

11

Dato che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n-N+2} = 0$  (essendo  $q < 1$ ),

Dal teorema dei 2 carabinieri segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_{n+1} = 0$$

□

Teo (criterio della radice per successioni a termini positivi)

Sia  $(a_n)$  una successione di numeri reali  $> 0$ . Se  $\exists q \in [0, 1)$  tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{def. in } n \quad (11.0)$$

allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . (11.1)

Se  $\exists q > 1$  tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q \quad \text{def. in } n \quad (11.2)$$

allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

Nota : niente si dice quando  $q = 1$

Dni Vediamo la (11.1) (la lim. dello <sup>12</sup>  
(11.2) è simile). Dalla (11.0) segue che

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq N$$

$$\Leftrightarrow a_n \leq q^n \quad \forall n \geq N$$

$$0 < a_n \leq q^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

□

Es (con)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1 \quad \text{se } a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

Q5

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{\overbrace{n}^1}{n} \cdot \frac{\overbrace{n-1}^1}{n} \cdot \frac{\overbrace{n-2}^1}{n} \cdots \frac{\overbrace{2}^1}{n} \cdot \frac{\overbrace{1}^1}{n}$$

me lo tengo

$$< \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Dunque dal teo. dei 2 carabinieri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Teo (rapporto  $\rightarrow$  radice) Sia  $(a_n)$

una succ. di numeri positivi, tale che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty] \quad (13.1)$$

Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l. \quad (13.2)$$

Nota: Consideriamo la succ. di pag 4

lesione 8:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[3]{3}/4 & n \equiv 1 (2) \\ \sqrt[5]{5}/4 & n \equiv 0 (2) \end{cases}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 15/12 & n \equiv 1 (2) \\ 1/20 & n \equiv 0 (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Dunque in generale la (13.2) non implica  
 la (13.1).

Dim Facciamo la dim. solo nel caso  $l \in [0, +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon = \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \bar{n}$$

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

$$(l - \varepsilon) a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon) a_n$$

Iterando

$$(l - \varepsilon)^{n+1-\bar{n}} a_{\bar{n}} < a_{n+1} < (l + \varepsilon)^{n+1-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (l - \varepsilon)^{\frac{n+1-\bar{n}}{n+1-\bar{n}}} \left( \frac{a_{n+1}}{a_{\bar{n}}} \right)^{\frac{n+1-\bar{n}}{n+1-\bar{n}}} & & (l + \varepsilon)^{\frac{n+1-\bar{n}}{n+1-\bar{n}}} \left( \frac{a_{n+1}}{a_{\bar{n}}} \right)^{\frac{n+1-\bar{n}}{n+1-\bar{n}}} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 l - \varepsilon & & l + \varepsilon
 \end{array}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq l + \varepsilon$$

$$\text{Se } \varepsilon = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$l - \frac{1}{k} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq l + \frac{1}{k}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( l - \frac{1}{k} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( l + \frac{1}{k} \right) = l$$

Oss sul teo. 7. Supponiamo la (7.1);

questa è la stessa ipotesi del Cor. a 6  
 lemma 7.  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

es. 1 pag 1 lemma 11

$\Rightarrow$  lui  $a_n = 0$ , che è

la tesi del criterio del rapporto per le successioni.

< CRITERIO DEL RAPPORTO PER SERIE A

TERMINI + E ES. 1 pag 1 lemma 11

$\Rightarrow$  CRITERIO DEL RAPPORTO PER SUCC.  $> 0 \Rightarrow$

$$\left( 1 + \epsilon \right) \frac{n+1 - \bar{n}}{n+1}$$