

Ricordo le lezioni lunedì 16-15-18.00

(S. PARZILI) opp'

Ritiro di questa settimana!

opp' 16.00 - 18.00 teleseminario

Lezione 12 20/10/2016 12.00 - 13.15

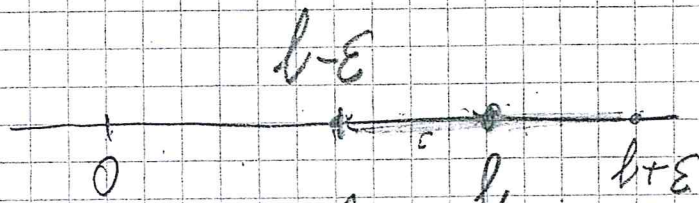
Teo (di permanenza del segno)

Sia (a_n) una succ. reale, e
supponiamo

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =: l > 0$$

Allora « definitivamente $a_n \varepsilon > 0$ »

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0 \quad \forall n > \bar{n}, n \in \mathbb{N}$$



Prendo $\varepsilon > 0$: $l - \varepsilon > 0$: di conseguenza

za di $\varepsilon \exists \bar{n}_\varepsilon = n \in \mathbb{N} : a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \cap$

$\forall n > \bar{n}$.

Tec ^("Le 2 combinati") $\sqrt{\text{Supponiamo che } (a_n) \text{ verifici } \dots}$

$$S_n \leq a_n \leq d_n \quad \text{thm 10}$$

e supponiamo

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$.

Dimo. (cosa)

Esercizio (una ^{prima} stima di quanto velocemente

$n!$ va all'infinito):

è un miglioramento di (5.1) perché

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} \cdot ne$$

Conseguenza: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (2.1)$

(equivalentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$)

Iufall

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} ne \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$

$$s_n = \frac{1}{e^n} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{ne}{e^n} = d_n$$


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$$



$$\text{dal teo di pag 2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Prova che a due mani

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n!}{n^n} \leq \frac{ne}{e^n}; \quad \boxed{n! \leq \frac{n^n}{e^n} ne}$$

Cerco di dim. $\square$ per induzione (su n):

• $n=1$ $1! \stackrel{?}{\leq} \frac{1^1}{e^1} \cdot e = 1$ Si

• Supp. $n! \leq \frac{n^n}{e^n} n e$ (4.1)

• Archiamo di dim. $(n+1)! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} (n+1) e$

Si ha: $(n+1)! = (n+1) n!$

$$\stackrel{(4.1)}{\leq} (n+1) \frac{n^n}{e^n} n e$$

?

$$\leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} (n+1) e$$

Ci riduciamo dunque a dim.

$$\cancel{(n+1)} \frac{n^n}{e^n} n e \leq \frac{\cancel{(n+1)}^{n+1}}{e^{n+1}} \cancel{(n+1)} e$$
$$\Leftrightarrow$$

$$n^{n+1} = n^n \cdot n \leq \frac{(n+1)^n}{e} (n+1) = \frac{(n+1)^{n+1}}{e}$$

$$n^{n+1} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e}$$



$$e \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

Questo segue dall'es. 3 pg 3 lezione 11:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \xrightarrow{\text{te. pg 3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = e$$

$$\leftarrow \frac{1}{e}$$

$\frac{n^n}{n!}$

$\rightarrow \infty$

$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{ne}{e^n}$

$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \downarrow c$

te. dei 2 costrutti

induzione + disug.

Bernoulli (ES. 144) lezione 2

BERNOULLI

Per Cor. : dim. $n! \geq \frac{n^n}{e^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Suggerimento: indurre su n .

Servirà probabilmente $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monotonica $\uparrow$
 $\parallel$
 e_n .

Altri limiti notevoli:

Sia $a > 0$. Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Trucco (antropomorfico):

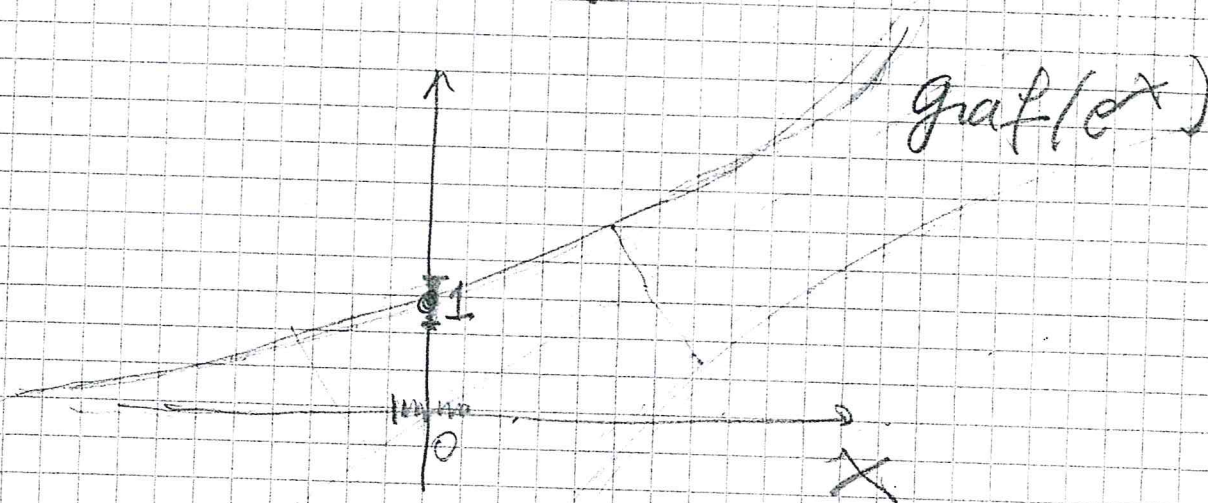
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log a} = e^{\frac{1}{n} \log a}$$

(TR)

$$\boxed{x} = e^{\log \boxed{x}}$$

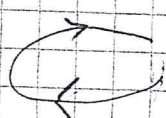
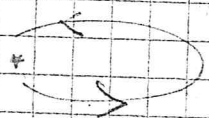
$$\boxed{x} > 0$$

logaritmo in base e



$$e^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$

$$\longleftarrow \log_e y$$



$$\ll \frac{\log a}{n} \longrightarrow 0, \quad e^{\frac{1}{n} \log a} \longrightarrow 1 \gg$$

$$\frac{\log n}{n} \gg$$

Dimostrare di 3):

$$\text{se } a = 1, \quad \sqrt[n]{a} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Supponiamo $a > 1$; se dimostriamo che in questo caso $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, allora dico

$$\text{che se } b \in (0, 1), \quad \sqrt[n]{b} \rightarrow 1$$

$$\text{Infatti } b = \frac{1}{a} \text{ con } a > 1 \quad (a = \frac{1}{b})$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \rightarrow 1$$

Posso dunque sempre supporre $a > 1$; e non

$$\sqrt[n]{a} > 1 \iff \underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_x > 0$$

Dalla diseg. di Bernoulli I (essendo $x > 0$,

$$\text{e } x \geq -1) \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx_n$$

$$\begin{aligned} (1+x_n)^n &= \left(1 + \sqrt[n]{a} - 1\right)^n = a \geq 1 + n \underbrace{(\sqrt[n]{a} - 1)}_{x_n} \\ \Rightarrow x_n &\leq \frac{a-1}{n} \end{aligned}$$

$$0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
0

teo. 2 Corollari
 $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Ma $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Ingredienti: teo 2 Corollari

Inegualtanza di Bernoulli I

Resto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Partiamo

da ripercorrere quanto fatto per $\sqrt[n]{a}$

(mettendo n al posto di a): ci ritroviamo

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{n-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\downarrow$ 0 $\rightarrow 1$